ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Дж. К. Т.

Аль Исави Джавад Кадим Тахир

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В КВАЗИСОБОЛЕВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические
системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент А.А. Замышляева

ЧЕЛЯБИНСК – 2016

Содержание

Обозначения и соглашения

1. Множества, как правило, обозначаются заглавными буквами готического алфавита. Исключения составляют множества с уже устоявшимися названиями, например:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел,

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел,

$\mathbb{R}_+$ — множество $\{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$,

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел,

$W_q^m(\Omega)$ — пространство Соболева,

ℓ_q — пространство последовательностей,

Элементы множеств обозначаются строчными буквами латинского или, в особых случаях, греческого алфавитов. Например,

$$\mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$$

обозначает линейную оболочку векторов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$.

2. Множества отображений множеств (т.е. множества операторов) обозначаются рукописными заглавными буквами латинского алфавита, например:

$\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ — множество линейных непрерывных операторов, определенных на пространстве $\mathfrak{U}$ и действующих в пространство $\mathfrak{F}$;

$\mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ — множество линейных замкнутых операторов, плотно определенных в пространстве $\mathfrak{U}$ и действующих в пространство $\mathfrak{F}$;

$C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ — множество операторов, имеющих непрерывные производные Фреше любого порядка, определенных на $\mathfrak{U}$ и действующих в $\mathfrak{F}$; Отметим, что вместо $\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{U})$, $\mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{U})$ и $C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{U})$ ради краткости будем писать соответственно $\mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $\mathcal{C}l(\mathfrak{U})$ и $C^\infty(\mathfrak{U})$. Элементы множеств операторов мы будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита. Кроме того, символами $\mathbb{I}$ и $\mathbb{O}$ мы будем обозначать соответственно "единичный"и "нулевой"операторы, области определения которых ясны из контекста.

$\mathrm{dom}M$ — область определения оператора M, $\mathrm{im}M$ — образ оператора M.

3. Все рассуждения проводятся в вещественных квазибанаховых пространствах, однако при рассмотрении "спектральных"вопросов вводится их естественная комплексификация. Все контуры ориентированы движением "против часовой стрелки"и ограничивают область, лежащую "слева"при таком движении.

4. Выражение "точно тогда, когда"заменяет выражение "тогда и только тогда, когда".

5. Символ • лежит в конце доказательства.

Введение

Актуальность темы исследования

Впервые уравнения, неразрешенные относительно производной, начал рассматривать, по-видимому, А. Пуанкаре. Систематическое же их изучение стартовало в 20 веке с работ С.Л. Соболева. Именно поэтому в современных математических исследованиях в отношении уравнений неразрешенных относительно производной стал общепринятым термин "уравнения соболевского типа". Заметим, что уравнения соболевского типа называются динамическими, если их решения продолжимы на всю ось $\mathbb{R}$, и эволюционными, если их решения существуют только на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Исследования уравнений, неразрешенных относительно производной, неразрывно связаны с развитием теории вырожденных голоморфных (полу)групп операторов. В настоящее время уравнения соболевского типа и связанные с ними вырожденные (полу)группы операторов активно изучаются области неклассических уравнений математической физики [15, 52, 61, 83, 84]. В последние десятилетия написано большое количество монографий полностью или частично посвященных этой тематике, сформировались научные направления, вокруг которых сложились научные школы. В этой области активно работают Р.Е. Шоуолтер (R.E. Showalter)[83], А. Фавини (A. Favini), А. Яги (A. Yagi) [69], Г.В. Демиденко[12], И.В. Мельникова [38], С.Г. Пятков [79], Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева [24], В.Е. Федоров [55].

Линейные уравнения соболевского типа и разрешающие их вырожденные (полу)группы операторов на основе относительно спектральной теории были изучены Г.А. Свиридюком и его учениками [47, 48]. Первая монография этой школы, посвященная голоморфным вырожденным группам и полугруппам, а также вырожденным C_0–полугруппам, вышла в свет в 2003 году [85]. Необходимо отметить, что результаты, изложенные в этой монографии, получены в банаховых пространствах. Поскольку интерес к уравнениям соболевского типа за последнее время существенно вырос, то возникла необходимость их рассмотрения в квазибанаховых пространствах. Причем необходимость диктуется как желанием пополнить теорию, так и стремлением осмыслить неклассические уравнения математической физики в квазибанаховых пространствах.

Квазинормированным пространством $(\mathfrak{U},_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ называется линейное пространство $\mathfrak{U}$ над полем $\mathbb{R}$ с *квазинормой* ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|$, которая отличается от нормы только аксиомой "неравенство треугольника":

$$\forall u, v \in \mathfrak{U} \quad {}_{\mathfrak{U}}\|u+v\| \leq C({}_{\mathfrak{U}}\|u\| +_{\mathfrak{U}} \|v\|),$$

где константа $C \geq 1$. Если $C = 1$, то квазинорма становится нормой, а квазинормированное пространство превращается в нормированное. Вообще говоря, квазинормированное пространство не нормируемо, но метризуемо [7, гл. 3]. Таким образом, для квазинормированного пространства имеют место понятия фундаментальной последовательности и полноты.

Полное квазинормированное пространство $\mathfrak{U}$ называется *квазибанаховым.* Любое банахово пространство является квазибанаховым, а обратное – неверно.

Понятие квазибанаховых пространств неразрывно связано с понятием банаховых пространств [7, 63]. Однако самостоятельный интерес к квазибанаховым пространствам, как к объекту исследования, появился сравнительно недавно, примером этого могут служить работы Н. Кэлтона (N. Kalton) [73], кроме того, такие пространства возникают при исследовании абелевых групп [7] и прикладных задач [9], [42], [71], [1].

Известно, что в общем случае в квазибанаховых пространствах не могут быть построены отображения, отличные от нулевого и тождественного [81], например, в пространстве $L_p[a, b]$, $0 < p < 1$. Вместе с тем, это справедливо не для всех квазибанаховых пространств. Так, в пространствах последовательностей ℓ_q, $0 < q < 1$ и построенных на их основе квазисоболевых пространствах ℓ_q^m, $0 < q < 1$, $m \in \mathbb{R}$ существуют линейные отображения, отличные от тривиальных [7, 2]. Подчеркнем, что в данном диссертационном исследовании рассматриваются только такие квазибанаховы пространства, которые в дальнейшем будем называть квазибанаховыми пространствами последовательностей или квазисоболевыми пространствами.

Актуальность исследования эволюционных уравнений соболевского типа обусловлена тем, что полученные ранее, более 20 лет назад, результаты в банаховых пространствах спустя некоторое время оказались применимы в теории динамических измерений [60], в теории оптимального управления [36], теории устойчивости уравнений соболевского типа [45], а также при изучении уравнений соболевского типа высокого порядка [18]. Уравнения соболевского типа возникают при моделировании различных процессов в естественных и технических науках [66, 85]: уравнение Дзекцера, описывающее эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости [14], уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной, моделирующее динамику вязко-упругой жидкости в трещинновато-пористой среде [6], уравнение волн Россби [46], система уравнений Соболева, линеаризованная система уравнений Навье – Стокса [33], многие другие системы уравнений гидродинамики [53, 54]. Для исследования такого рода прикладных задач при более общих условиях является развитие теории вырожденных голоморфных групп операторов.

Постановка задач

Пусть $Q_n(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i\lambda^i$ и $R_s(\lambda) = \sum_{j=0}^{s} d_j\lambda^j$ – многочлены с действительными коэффициентами, не имеющие общих корней, степеней n и s, соответственно, причем $n < s$ и $d_sc_n < 0$. Рассмотрим операторы $Q_n(\Lambda)u = \{Q_n(\lambda_k)u_k\}$, где $\{u_k\} \in \ell_q^{m+2n}$ и $R_s(\Lambda)u = \{R_s(\lambda_k)u_k\}$ $n \in \mathbb{N}$, где $\{u_k\} \in \ell_q^{m+2s}$, а монотонная последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ такова, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Как нетрудно видеть, оператор $Q_n(\Lambda) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, а оператор $R_s(\Lambda) \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $\mathrm{dom}R_s(\Lambda) = \ell_q^{m+2s}$. Где $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2n}, \mathfrak{F} = \ell_q^{m}$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$.

Рассмотрим класс эволюционных уравнений

$$Q_n(\Lambda)\dot{u} = R_s(\Lambda)u \tag{0.0.1}$$

в квазисоболевых пространствах последовательностей. Положив $L = Q_n(\Lambda),\ M = R_s(\Lambda)$, будем рассматривать уравнение (0.0.1) в рамках абстрактного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu, \tag{0.0.2}$$

где вектор-функцию $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+;\mathfrak{U})$ будем называть решением уравнения (0.0.2), если при подстановке она обращает его в тождество.

Решение $u = u(t)$ такого уравнения назовем решением задачи Коши

$$u(0) = u_0, \tag{0.0.3}$$

если оно вдобавок удовлетворяет условию Коши (0.0.3) при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Рядом исследователей, например в [50], отмечается, что при произвольных начальных данных задача Коши (0.0.3) неразрешима для уравнения (0.0.2). Поэтому более целесообразным является рассмотрение задачи Шоуолтера–Сидорова

$$P(u(0) - u_0) = 0, \tag{0.0.4}$$

где P – проектор на образ разрешающей группы операторов уравнения (0.0.2). Отметим, что задача Шоуолтера–Сидорова в невырожденном случае совпадает с задачей Коши, а в вырожденном — может быть решена при произвольных начальных данных.

В работе исследована разрешимость начальных задач (0.0.3) и (0.0.4) как для уравнения (0.0.2), так и для неоднородного уравнения вида

$$L\dot{u} = Mu + g, \tag{0.0.5}$$

где $g : \mathbb{R} \to \mathfrak{F}$.

Подчеркнем, что при исследовании задачи (0.0.3), (0.0.5) необходимо получение дополнительного условия "согласования начальных данных".

Целью работы является исследование разрешимости одного класса эволюционных уравнений соболевского типа в квазибанаховых пространствах последовательностей с изучением свойств полученных решений.

Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

1. Исследовать относительно секториальные операторы в квазибанаховых пространствах последовательностей с получением результатов об их свойствах;

2. Обобщить результаты теории вырожденных голоморфных полугрупп в квазибанаховы пространства последовательностей;

3. Исследовать разрешимость задачи Коши, задачи Шоуолтера–Сидорова для одного класса уравнений соболевского типа с использованием теории вырожденных голоморфных полугрупп в квазибанаховых пространствах последовательностей;

4. Построить инвариантные пространства и исследовать экспоненциальные дихотомии решений рассматриваемого класса уравнений.

5. Исследовать уравнение Дзекцера в квазибанаховых пространствах последовательностей с изучением свойств его решений.

Историография вопроса

Если оператор L непрерывно обратим, то уравнение (0.0.2) можно редуцировать к паре эквивалентных ему уравнений

$$\dot{u} = Su, \qquad \dot{f} = Tf, \tag{0.0.6}$$

где операторы $S \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, и $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$. Уравнения (0.0.6) будем рассматривать в рамках уравнения

$$\dot{v} = Av, \tag{0.0.7}$$

где оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{V})$, а $\mathfrak{V}$ – квазибанахово пространство. Вектор-функцию $v \in C^{\infty}(\mathbb{R}; \mathfrak{V})$ назовем решением уравнения (0.0.7),

Уравнения (0.0.7) удобно исследовать в рамках теории (полу)групп операторов. Решение операторно-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах неразрывно связано с развитием теории разрешающих полугрупп. Основным результатом классической теории полугрупп являются теоремы, устанавливающие взаимно однозначное соответствие между разрешающей (полу)группой однородного уравнения (0.0.7) и оператором A, называемым инфинитезимальным генератором полугруппы. Критерием того, что оператор A является инфинитезимальным генератором (полу)группы (иначе говорят, порождает полугруппу), служат некоторые условия на резольвенту $R_\mu(A) = (\mu I - A)^{-1}$ оператора A. В классической теории полугрупп операторов в банаховых пространствах можно выделить три основных случая, когда семейство является: 1) сильно непрерывной полугруппой; 2) голоморфной полугруппой; 3) голоморфной группой.

В первом, самом непростом, случае классическим результатом о разрешимости уравнения (0.0.7) является теорема Хилле–Иосиды–Феллера–Миядеры–Филлипса (теорема ХИФМФ) [58], устанавливающая биекцию между множеством разрешающих полугрупп операторов и множеством операторов, называемых генераторами этих полугрупп (развитие этой теории см., например, в [77]). Во втором — аналогичный результат сформулирован в теореме Соломяка–Иосиды [86] (отметим также работы [26, 27, 57]). Наконец, в третьем случае подобная взаимосвязь является следствием применения преобразования Лапласа [11, 29].

В свое время полу(группы) уравнения (0.0.2) в банаховых пространствах рассматривались разным авторами [38, 49, 69]. При этом исследователи отмечали, что характерной чертой (полу)группы уравнения с вырожденным оператором является то, что единицей полугруппы является не тождественный оператор, как в классической теории полугруппы операторов, а проектор на некоторое подпространство. Этот факт, в частности, влечет то, что задача Коши разрешима не для произвольных начальных значениях. Такие полугруппы в дальнейшем называются вырожденным, либо полугруппами операторов с ядрами.

Так, разрешимость задачи (0.0.2),(0.0.3) изучали математики школы С.Г. Крейна. Продолжая традицию, заложенную в работах К. Вейерштрасса и Л. Кронекера, при изучении этой задачи использовалось понятие регулярного операторного пучка $M + \lambda L$. (Пучок $M + \lambda L$ называется регулярным, если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow ((M + \mu L)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U}))).$$

С.П. Зубовой и К.И. Чернышовым [19] исследован случай, когда $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$ – банаховы пространства, L – замкнутый фредгольмов, M – ограниченный оператор. Для регулярного случая ими доказана однозначная разрешимость однородной задачи Коши при начальных значениях из некоторого подпространства с конечным дефектом. Также показано, что решение неоднородной задачи Коши (0.0.3),(0.0.5) существует для достаточно гладких функций $f(t)$, определенным образом согласованных с начальными данными. В сингулярном случае решение однородной задачи неединственно и существует только при начальных данных, удовлетворяющих счетному числу условий, а для разрешимости неоднородной задачи от $f(t)$ требуется бесконечная гладкость и выполнение счетного числа условий согласования с начальными данными.

Используя методы классического и локального преобразования

Лапласа и спектральную теорию операторных пучков, А.Г. Руткас [43] исследовал задачу (0.0.3),(0.0.5) в случае, когда $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$ – банаховы пространства, L, M – линейные ограниченные операторы. В статье охарактеризованы нормальные решения, корректная и диссипативная задача Коши, описано начальное многообразие при различных условиях. Результаты исследования применяются к задачам рассеяния и прохождения сигналов в дискретных структурах.

Отметим, что преобразование Лапласа является распространенным методом построения разрешающих семейств операторов [4, 5, 43, 44, 62, 67]. Поэтому также интересны результаты спектральной теории, как сами по себе [41], так и с точки зрения построения разрешающих семейств [59].

A. Favini [67] ввел в рассмотрение задачу

$$\frac{d}{dt}Lu(t) = Mu(t) + f(t) \quad (0 < t < \infty)$$

$$\lim_{t \to 0+} Lu(t) = u_0$$

с замкнутыми линейными операторами L, M. В [68] он рассматривает то же уравнение на конечном отрезке $[0, T]$ с начальным условием $Lu(0) = Lu_0, \quad \mathrm{dom}L \supseteq \mathrm{dom}M \ni u_0, \quad \mathfrak{U} = \mathfrak{F}$. В терминах оператора $M(\mu L - M)^{-1}$ сформулированы теоремы существования и единственности решения этих задач при некоторых условиях на начальное значение u_0 и гладкость функции $f(t)$.

Обобщение классической теории идет сразу по нескольким направлениям. Одно из них – получение некоторых семейств операторов, дающих решение уравнения (0.0.2) в более общем смысле. Введение понятий экспоненциально ограниченной и n раз интегрированной полугрупп [39, 62] позволило в случае, когда задача Коши

$v(0) = v_0$ для уравнения (0.0.2) некорректна, но оператор A порождает такую полугруппу, получить решение этой задачи.

В работе [39] устанавливается взаимно однозначная связь между существованием интегрированной полугруппы и существованием обобщенного решения задачи Коши для уравнения (0.0.7). В [62] W. Arendt обобщил теорему ХИФФМ на случай n раз интегрированных полугрупп.

Определив экспоненциально ограниченную C-полугруппу [39, 62, 65, 74] $\{V^t : t \geq 0\}$, удалось получить решение $v(t) = C^{-1}V^t v_0$ задачи Коши для уравнения (0.0.7) в случае, когда оператор A является генератором C-полугруппы. Это решение получено для $v_0 \in C[\mathrm{dom}A]$ и устойчиво относительно нормы $\|v_0\|_{C^{-1}} = \|v_0\|_{\mathfrak{U}} + \|C^{-1}v_0\|_{\mathfrak{U}}$. Отметим, что для C-полугрупп также доказан аналог теоремы ХИФФМ.

Отметим также распространение теории полугрупп на пространства Степанова [25, 28], которые позволяют рассматривать более широкое множество операторов в уравнениях вида (0.0.7). В настоящее время в г. Воронеже усилиями В.А. Костина создана математическая школа, представители которой изучают пространства Степанова и C_0-полугруппы с особенностями в различных аспектах.

Далее, результаты по исследованию уравнений вида (0.0.7) в банаховых пространствах [3, 8, 16, 22, 29, 58, 77] распространяются в локально выпуклые пространства [76]. Как оказалось [82], [75], [86]), теория полугрупп в таких пространствах близка к теории полугрупп в банаховых пространствах, так как основным методом исследования в обоих случаях может служить резольвента генератора полугруппы.

Разрешимость уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах изучена в [22, 57]. Теоремы о существовании решений таких уравнений в локально выпуклых пространствах доказаны в относительно ограниченном, относительно секториальном, относительно радиальном случаях [86]. В работе [55] сформулированы результаты о существовании разрешающих семейств операторов в максимальной степени общности для локально выпуклых пространствах и пространств Фреше, которые являются проективными пределами пространств Соболева.

В работах [21, 56] сделаны первые шаги по разрешимости уравнений соболевского типа в квазисоболевых пространствах и формированию теории вырожденных разрешающих групп операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей с рассмотрением случая относительно ограниченных операторов.

В данной работе построена теория вырожденных полугрупп разрешающих эволюционное уравнение соболевского типа вида (0.0.7) в квазисоболевых пространствах последовательностей.

В теории устойчивости динамических и эволюционных дифференциальных уравнений важную роль играет понятие экспоненциальной дихотомии как одной из моделей асимптотического поведения его решений ([11], [37], [57]).

Как уже было отмечено, одной из задач исследования данной работы являются вопросы существования экспоненциальных дихотомий решений уравнений соболевского типа первого порядка в квазибанаховых пространствах последовательностей. Наиболее глубокие результаты по проблеме устойчивости решений лежат в области обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной. Эта теория развивалась очень интенсивно. Отправной точкой здесь являются работы А.М. Ляпунова [34]. Наиболее полно результаты по устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений изложены Ф. Гантмахером [10], Б. Демидовичем [13], Э. Коддингтоном и Н. Левинсоном [23].

Системы уравнений, обладающие свойством экспоненциальной дихотомией изучались в работе [78], посвященной нелинейным возмущениям таких уравнений, которая была обобщением относящейся к двумерному дискретному случаю работы Ж. Адамара [70]. Эквивалентность экспоненциальной дихотомии системы обыкновенных дифференциальных уравнений условию существования ограниченных решений неоднородного уравнения была впервые установлена А.Д. Майзелем [35]. Аналогичную задачу для нелинейного уравнения со стационарной линейной частью рассматривал П. Боль [64].

М.Г. Крейн [31] впервые изучил вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений в бесконечномерных банаховых пространствах. Подробно эти исследования изложены им в [32]. Классическими работами в области исследования дихотомий решений однородного уравнения (0.0.7) стали монографии Ю.Л. Далецкого и М.Г. Крейна [11], Х.Л. Массера и Х.Х. Шеффера [37], где рассматривались уравнения с ограниченным оператором S.

В монографии Ю.Л. Далецкого и М.Г. Крейна [11] рассмотрены вопросы устойчивости решений однородного и неоднородного уравнения вида (0.0.7). Получены достаточные условия существования экспоненциальных дихотомий решений однородного уравнения в терминах спектра оператора S. Кроме того, получен критерий существования дихотомий при условии дополнительности некоторого инвариантного подпространства решений уравнения (0.0.7) с оператором S, зависящим от t.

В работе Х.Л. Массера и Х.Х. Шеффер[37] изучаются однородные и неоднородные уравнения вида (0.0.7) с ограниченным оператором S, зависящим от t. Получены условия допустимости пар инвариантных пространств и существования не только экспоненциальных, но и простых дихотомий решений.

В работе Д. Хенри [57] изучается разрешимость задачи Коши стационарного и нестационарного линейных уравнений первого порядка вида (0.0.7), где S – *секториальный*, т. е. порождающий аналитическую полугруппу, оператор. Получены достаточные условия существования и единственности ограниченных решений уравнения (0.0.7) и его задачи Коши.

С.Г. Пятковым [80] изучено существование максимальных семидефинитных инвариантных подпространств для J-диссипативных операторов и полугрупповые свойства сужений оператора на эти инвариантные подпространства.

Экспоненциальные дихотомии решений уравнения (0.0.2) исследовались Г.А. Свиридюком и А.В. Келлер [20, 51] в случаях (L, σ)-ограниченного и сильно (L, p)-секториального оператора M в банаховых пространствах. В терминах L-спектра оператора M ими были получены условия существования экспоненциальных дихотомий решений уравнения (0.0.2). Вопросы устойчивости решений уравнения соболевского типа рассматривались в [17].

В данной работе будет исследован вопрос существования экспоненциальных дихотомий решений уравнения (0.0.2) в квазисоболевых пространствах последовательностей.

Методы исследования

В данной работе при исследовании вырожденных эволюционных уравнений за основу взят подход, суть которого заключается в построении вырожденных разрешающих полугрупп операторов, дающих классическое решение задачи (0.0.2), (0.0.3). Особенность разрешающих операторов вырожденного уравнения (0.0.2) заключается в том, что они обладают нетривиальными ядрами, содержащими ядро оператора при производной. Для построения теории вырожденных голоморфных полугрупп операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей используются классические методы функционального анализа, теории линейных ограниченных операторов, спектральной теории. Для построения операторов разрешающих полугрупп, по аналогии с классическими результатами, используется преобразование Лапласа операторнозначных функций в квазибанаховых пространствах последовательностей, для чего необходимо обоснование существования в квазибанаховых пространствах последовательностей аналитичности отображения и интегрирования для таких отображений. В основе этого обоснования лежит метризуемость квазибанаховых пространств последовательностей.

Для преодоления трудностей, связанных с наличием ядер у разрешающих полугрупп, применяется метод фазового пространства, заключающийся в том, что оба пространства, в которых действуют операторы, представимы в виде прямых сумм ядер и образов разрешающих полугрупп (точнее, их единиц). При этом действие операторов L и M распадается в соответствии с расщеплением пространств, на ядре полугруппы оказывается обратимым сужение оператора M, а на образе – сужение оператора L. Тем самым исходное уравнение (или задача Коши для него) редуцируется к системе двух уравнений (двух задач Коши), заданных на взаимно дополнительных подпространствах. Уравнение на образе имеет вид (0.0.6), при этом оператор S является инфинитезимальным генератором уже невырожденной полугруппы соответствующего класса и исследование его разрешимости и свойств его решений проводится классическими методами. Другое уравнение принимает вид

$$H\dot{u}(t) = u(t) + v(t),$$

и получить его решение в явном виде и, соответственно, исследовать его свойства позволяет нильпотентность оператора H.

Новизна полученных результатов

В диссертационной работе получены следующие результаты:

1. Построена теория относительно секториальных операторов в квазисоболевых пространствах последовательностей. Построены относительные резольвенты, рассмотрены их свойства, построены относительно присоединенные векторы. Доказана теорема о расщеплении пространств, действий операторов в квазисоболевых пространствах последовательностей в относительно секториальном случае.

2. Доказана теорема о существовании голоморфных разрешающих вырожденных полугрупп операторов в квазисоболевых пространствах последовательностей. Исследованы ядра и образы полугрупп, доказано существования единиц.

3. Полученные результаты теории голоморфных вырожденных полугрупп операторов применены к исследованию разрешимости на-

чальных задач для одного класса вырожденных эволюционных уравнений в квазисоболевых пространствах последовательностей.

4. Определены многочлены от квазиоператора Лапласа и рассмотрен "квазибанахов" аналог однородной задачи Дирихле в ограниченной области с гладкой границей для линейного уравнения Дзекцера.

5. Исследованы свойства решений одного класса вырожденных эволюционных уравнений в квазисоболевых пространствах последовательностей. Получены условия существования инвариантных пространств и дихотомий решений.

Теоретическая и практическая значимость исследования

Теоретическая значимость исследования заключается в развитии теории эволюционных уравнений соболевского типа, а именно получении ряда обобщающих результатов в квазибанаховых пространствах последовательностей. Это исследование продолжает развитие теории вырожденных (полу)групп операторов, которая неразрывно связана с решением неклассических уравнений математической физики.

Кроме того, получение теоретической базы позволяет не только начать исследования неклассических уравнений в квазибанаховых пространствах последовательностей и различных задач для такого рода, но и рассматривать возможность более эффективного решения ряда технических задач. Именно возможность приложения полученных теоретических результатов к различным областям научных исследований позволяет говорить о практической значимости исследования.

Апробации

Результаты, изложенные в диссертации, были представлены на:

– Международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа" (Воронеж, 2014, 2016),

– Международной конференции "Дифференциальные уравнения и динамические системы" (Суздаль, 2014),

– Международной конференции "Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ"(УФА, 2015),

– Шестнадцатом всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Сочи, 2015),

– Международной научно-практической конференции "Приоритетные научные исследования и разработки" (Саратов, 2016)

– научных конференциях аспирантов и докторантов ЮУрГУ "Технические науки. Естественные науки. Социально-гуманитарные науки. Экономика. Управление. Право."(Челябинск, 2014, 2015).

– семинаре профессора Г.А. Свиридюка "Уравнения соболевского типа" в Южно-Уральском государственном университете.

Результаты диссертации опубликованы в работах [87] – [93].

Необходимо отметить, что во всех работах [87], [88], [91], [93], выполненных в соавторстве с научным руководителем, последнему принадлежит только постановка задачи и некоторые идеи доказательств. Все доказательства выполнены автором диссертации самостоятельно.

Краткое содержание диссертации

Диссертация построена из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Введение содержит актуальность и предпосылки исследования, постановку задач и цели работы, представлены историография вопроса, описываются методы исследования и новизна полученных результатов, теоретическая и практическая значимость и результаты работы.

Первая глава содержит пять параграфов, результаты, связанные с предварительными данными не выносятся на защиту. В параграфе 1.1 содержатся определения и понятия квазисоболевых и квазибанаховых пространств последовательностей. Также содержится доказательство теоремы о вложениях. В п. 1.2 приведено понятие ограниченных и непрерывных операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей. Также содержатся аналог теоремы Банаха и доказан аналог теоремы Банаха-Штейнгауза. В п. 1.3 приводится определение линейных замкнутых операторов и доказываются теоремы, связанные с линейными замкнутыми операторами в квазибанаховых пространствах. В п. 1.4 рассматриваются функции линейных ограниченных операторов. Кроме того, исследуются аналитические функции операторов. В п. 1.5 построен квазиоператор Лапласа, рассмотрены квазисоболевы пространства и доказаны теоремы о них.

Вторая глава посвящена вырожденным полугруппам операторов в квазисоболевых пространствах, состоит из шести параграфов. В п. 2.1 исследованы относительные резольвенты в квазибанаховых пространствах последовательностей и их свойства. В п. 2.2 вводится в рассмотрение относительно секториальный оператор. В п. 2.3 рассмотрено существование вырожденных голоморфных разрешающих полугруппы для однородного уравнения соболевского типа. Доказана теорема о существовании аналитической равномерно ограниченной разрешающей полугруппы, теорема о расщеплении пространств и действий операторов. П. 2.4 содержит исследование обобщенной задачи Шоуолтера – Сидорова для эволюционного уравнения соболевского типа в квазисоболевых пространствах. Доказана теорема об однозначной разрешимости такой задачи. В п. 2.5 вводится понятие фазового пространства для эволюционного уравнения соболевского типа в квазисоболевых пространствах, доказана теорема о существовании фазового пространства, доказана теорема о существовании единицы полугруппы. Наконец в последнем, п. 2.6 доказано существование обратного оператора.

Третья глава состоит из шести параграфов посвящена изучению эволюционных уравнений соболевского типа в квазисоболевых пространствах и приложению полученных теоретических результатов. В п. 3.1 рассмотрена задача Коши для неоднородного уравнения соболевского типа в квазисоболевых пространствах последовательностей. Доказана теорема о существовании единственного решения. В п. 3.2 доказана относительно спектральная теорема. В п. 3.3 содержатся сведения об инвариантных пространствах уравнения. Получены условия, при которых существуют инвариантные пространства для пары эквивалентных уравнений соболевского типа. В п. 3.4 содержатся определения экспоненциальные дихотомии решений и доказана теорема о том, что при определенных условиях решения пары эквивалентных уравнений соболевского типа обладают экспоненциальной дихотомией. В п. 3.5 рассмотрено уравнение Дзекцера в квазисоболевых пространствах и доказано существование единственного решения начальной задачи для него. В п. 3.6 изучаются свойства решений уравнения Дзекцера в квазисоболевых пространствах.

В Заключении представлены выводы о результатах, перспективы и направления развития исследования в дальнейшем.

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Теоремы о существовании разрешающих голоморфных вырожденных полугрупп операторов с разработкой теории относительно секториальных операторов в квазисоболевых пространствах.
2. Теорема о существовании фазового пространства однородного эволюционного уравнения в квазисоболевых пространствах.
3. Теоремы о разрешимости задач Коши, Шоуолтера–Сидорова для неоднородного уравнения соболевского типа в квазисоболевых пространствах.
4. Теоремы о существовании инвариантных подпространств и экспоненциальных дихотомий решений для однородных уравнений указанного класса.
5. Теоремы о разрешимости и свойствах решений аналога уравнения Дзекцера в квазисоболевых пространствах.

1. Квазисоболевы пространства последовательностей и линейные операторы

1.1. Квазисоболевы пространства последовательностей

Пусть $\mathfrak{U}$ – некоторое линейное пространство; упорядоченная пара $(\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ называется *квазинормированным пространством*, если

(i) $\forall u \in \mathfrak{U}\ {}_{\mathfrak{U}}\|u\| \geq 0$, причем ${}_{\mathfrak{U}}\|u\| = 0 \ \Leftrightarrow\ u = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0} \in \mathfrak{U}$;

(ii) $\forall u \in \mathfrak{U}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ {}_{\mathfrak{U}}\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot {}_{\mathfrak{U}}\|u\|$;

(iii) $\forall u, v \in \mathfrak{U}\ \ {}_{\mathfrak{U}}\|u + v\| \leq C({}_{\mathfrak{U}}\|u\| +\ {}_{\mathfrak{U}}\|v\|)$, где константа $C \geq 1$ и не зависит от u и v. Функция ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\| : \mathfrak{U} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется *квазинормой* в случае $C \geq 1$, а в случае $C = 1$ еще и нормой. Таким образом, понятия квазинормированного пространства является обобщением понятия нормированного пространства. В дальнейшем квазинормированное пространство $(\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ будем отождествлять с линейным пространством $\mathfrak{U}$.

Квазинорма ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|$ естественным образом задает топологию на $\mathfrak{U}$. Базисом окрестностей служит совокупность всех множеств вида $\{u \in \mathfrak{U} :\ {}_{\mathfrak{U}}\|u - v\| < \varepsilon\}$, где $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. В случае $C = 1$ эта топология определяется посредством метрики $\rho(u, v) = {}_{\mathfrak{U}}\|u - v\|$. Однако, квазинормированное пространство метризуемо и в случае $C > 1$.

Лемма 1.1.1. (лемма 3.10.1 [7]). *Пусть* $\mathfrak{U}$ *– квазинормированное пространство и пусть число* ρ *определяется уравнением* $(2C)^\rho = 2$. *Тогда на* $\mathfrak{U}$ *существует метрика* $d : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$ *такая, что при всех* $u \in \mathfrak{U}$

$$d(\mathbf{0}, u) \leq {}_{\mathfrak{U}}\|u\|^\rho \leq 2d(\mathbf{0}, u). \tag{1.1.1}$$

Лемма 1.1.2. (лемма 3.10.2 [7]) Пусть $\mathfrak{U}$ – квазинормированное пространство и пусть число ρ определяется уравнением $(2C)^{\rho} = 2$. Если $u = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ (сходимость в $\mathfrak{U}$), то

$$
{}_{\mathfrak{U}}\|u\} \leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} {}_{\mathfrak{U}}\|u_k\|^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}}
$$

Далее, если $\mathfrak{U}$ полно, то конечность правой части этого неравенства влечет за собой сходимость в $\mathfrak{U}$ ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$.

Из леммы 1.1.1 вытекает, что мы располагаем понятием *фундаментальной последовательности* $\{u_n\} \subset \mathfrak{U} : \lim\limits_{n,l \to \infty} {}_{\mathfrak{U}}\|u_n - u_l\| = 0$, а значит, и понятием полноты. Полное квазинормированное пространство называется *квазибанаховым.* Предел $u \in \mathfrak{U}$ сходящейся в квазибанаховом пространстве $\mathfrak{U}$ последовательности $\{u_n\} \subset \mathfrak{U}$ будем обозначать $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = u$.

Пример 1.1.1. Пространства последовательностей ℓ_q, $q \in \mathbb{R}_+$ банаховы при $q \in [1, +\infty)$ и квазибанаховы при $q \in (0, 1)$. Во втором случае $C = 2^{\frac{1-q}{q}}$.

Доказательство. Пусть $x = \{x_k\}$, $y = \{y_k\} \in \ell_q$. Для доказательства оценки будем использовать известные неравенства для чисел $a \geq 0$, $b \geq 0$

$$
(a + b)^q \leq a^q + b^q \leq 2^{1-q}(a + b)^q \text{ при } q \in (0, 1).
$$

В силу сначала левого, а потом правого неравенства имеем

$$
{}_{q}\|x + y\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|x_k| + |y_k|)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq
$$

$$
\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|x_k|^q + |y_k|^q) \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} =
$$

$$= ({}_q\|x\|^q + {}_q\|y\|^q)^{\frac{1}{q}} \le \left(2^{1-q}({}_q\|x\| + {}_q\|y\|)^q\right)^{\frac{1}{q}} = 2^{\frac{1-q}{q}}({}_q\|x\| + {}_q\|y\|).$$

Следовательно, $C = 2^{\frac{1-q}{q}}$ при $q \in (0,1)$ $\bullet$.

Пространства последовательностей ℓ_q при $q \in (0,1)$ будем называть *квазибанаховыми пространствами последовательностей.*

Пусть последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$, такова что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. По аналогии с пространствами Соболева W_q^m введем в рассмотрение *квазисоболевы пространства последовательностей*

$$\ell_q^m = \left\{ \{u_k\} \subset \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}}|u_k|\right)^q < +\infty \right\},$$

где $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$. Пространства ℓ_q^m квазибанаховы при всех $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$ с квазинормой

$${}_q^m\|u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}}|u_k|\right)^q \right)^{1/q},$$

причем они тоже банаховы только если $q \in [1, +\infty)$. Если $q \in (0,1)$, то константа $C = 2^{\frac{1-q}{q}}$. Докажем это.

$${}_q^m\|u+v\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}}|u_k+v_k|\right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{m}{2}}|u_k| + \lambda_k^{\frac{m}{2}}|v_k|)^q \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{\infty} ((\lambda_k^{\frac{m}{2}}|u_k|)^q + (\lambda_k^{\frac{m}{2}}|v_k|)^q) \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{m}{2}}|u_k|)^q + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{m}{2}}|v_k|)^q \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left({}_q^m\|u\|^q + {}_q^m\|v\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(2^{1-q}({}_q^m\|u\| + {}_q^m\|v\|)^q\right)^{\frac{1}{q}} = 2^{\frac{1-q}{q}}({}_q^m\|u\| + {}_q^m\|v\|).$$

Следовательно, $C = 2^{\frac{1-q}{q}}$ при $q \in (0,1)$. Заметим еще, что если $m = 0$, то $\ell_q^0 = \ell_q$.

Замечание 1.1.1. Очевидно, что число ρ, определяемое уравнением $(2C)^\rho = 2$ для пространств ℓ_q и ℓ_q^m будет равно числу q.

Пусть $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ и $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F};\ {}_{\mathfrak{F}}\|\cdot\|)$ — квазисоболевы пространства последовательностей. Говорят, что

— $\mathfrak{U}$ *вложено в* $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{F}$;

— $\mathfrak{U}$ *плотно вложено в* $\mathfrak{F}$, если вдобавок замыкание $\overline{\mathfrak{U}} = \mathfrak{F}$;

— $\mathfrak{U}$ *плотно и непрерывно вложено в* $\mathfrak{F}$, если вдобавок для всех $u \in \mathfrak{U}$ выполнено ${}_{\mathfrak{F}}\|u\| \leq K \cdot {}_{\mathfrak{U}}\|u\|$, где $K \in \mathbb{R}_+$ — константа, не зависит от u. Плотное и непрерывное вложение будем обозначать символом $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$.

Теорема 1.1.1. *При всех $q \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{R}$, $l \leq m$, имеют место плотные и непрерывные вложения $\ell_q^m \hookrightarrow \ell_q^l$.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$, такова что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$ и $u \in \ell_q^m$, $0 < q < 1$, тогда

$$u \in \left\{ \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k|)^q < \infty \right\}.$$

Покажем, что $u \in \ell_q^l$.

$${}_q^l\|u\|^q = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{l}{2}} |u_k|)^q = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k|)^q \cdot (1/\sqrt{\lambda_k})^{(m-l)q} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k|)^q \cdot \max_k (1/\sqrt{\lambda_k})^{(m-l)q}$$

Отсюда,

$${}_q^l\|u\| \leq {}_q^m\|u\| \cdot (\sup_k (1/\sqrt{\lambda_k})^{(m-l)q})^{1/q}$$

Положив, $K = (\max\limits_k (1/\sqrt{\lambda_k})^{(m-l)q})^{1/q}$, получим ${}_q^l\|u\| \leq K \cdot {}_q^m\|u\|$.

Поэтому, ℓ_q^m непрерывно вложено в ℓ_q^l. Докажем теперь плотность вложения. Пусть $u \in \ell_q^l$. Рассмотрим последовательность $\{u_n\}$, где

$$u_1 = (u_1, 0, 0, \ldots),\ u_2 = (u_1, u_2, 0, 0, \ldots),\ \ldots,$$

$$\ldots,\ u_n = (u_1, u_2, \ldots, u_n, 0, 0, \ldots), \ldots.$$

Очевидно, $\{u_n\} \subset \ell_q^m$, причем $u_n \to u$ в квазинорме l_q^l. •

1.2. Линейные операторы в квазибанаховых пространствах

Теперь пусть $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ и $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F};\ {}_{\mathfrak{F}}\|\cdot\|)$ — квазибанаховы пространства. Линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ отображающий пространство $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$ называется *непрерывным*, если $\lim\limits_{n\to\infty} Lu_n = L\Big(\lim\limits_{n\to\infty} u_n\Big)$ для любой сходящейся в $\mathfrak{U}$ последовательности $\{u_n\} \subset \mathfrak{U}$ и *ограниченным*, если при любом $u \in \mathfrak{U}$

$${}_{\mathfrak{F}}\|Lu\| \leq K \cdot {}_{\mathfrak{U}}\|u\|,$$

где $K \in \mathbb{R}_+$ не зависит от u.

Лемма 1.2.1. (лемма о непрерывности [72]). *Пусть* $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}; d_1)$ *и* $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}; d_2)$ *два метрических пространства и оператор* $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ *отображающий пространство* $\mathfrak{U}$ *в пространство* $\mathfrak{F}$, *определенный в окрестности точки* $u_0 \in \mathfrak{U}$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) L *непрерывное отображение в точке* $u_0 \in \mathfrak{U}$, *т.е.*

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : \forall u \in \mathfrak{U} \quad d_1(u, u_0) < \delta \ \Rightarrow\ d_2(Lu, Lu_0) < \varepsilon;$$

(ii) *прообраз открытого в* $\mathfrak{F}$ *множества открыт в* $\mathfrak{U}$;

(iii) *для любой последовательности* $\{u_n\} \subset \mathfrak{U}$ *такой, что* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u_0$, *последовательность* $\{Lu_n\}$ *является сходящейся в* $\mathfrak{F}$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} Lu_n = L\Big(\lim\limits_{n\to\infty} u_n\Big)$.

Теорема 1.2.1. *Пусть* $\mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{F}$ *– квазибанаховы пространства последовательностей. Линейный оператор* $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ *такой, что* dom $L{=}\mathfrak{U}$, *непрерывен точно тогда, когда он ограничен.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $L:\mathfrak{U}\to\mathfrak{F}$ ограниченный линейный оператор. Тогда при любом $u\in\mathfrak{U}$

$$
{}_{\mathfrak{F}}\|Lu\|\leq K\cdot{}_{\mathfrak{U}}\|u\|,
$$

где $K\in\mathbb{R}_+$ не зависит от u.

Рассмотрим произвольную сходящуюся последовательность $\{u_n\}\subset\mathfrak{U}$, т.е. $u_n\to u$, когда $n\to\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty}{}_{\mathfrak{U}}\|u_n-u\|=0$.

Тогда

$$
{}_{\mathfrak{F}}\|Lu_n-Lu\|={}_{\mathfrak{F}}\|L(u_n-u)\|\leq K\cdot{}_{\mathfrak{U}}\|(u_n-u)\|.
$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}{}_{\mathfrak{F}}\|Lu_n-Lu\|=0$, следовательно $Lu_n\to Lu$, когда $n\to\infty$, то есть оператор L непрерывен.

($\Leftarrow$) Пусть $L:\mathfrak{U}\to\mathfrak{F}$ непрерывный линейный оператор. Предположим,что L не ограниченный. Тогда существует последовательность $\{u_n\}\subset\mathfrak{U}$ такая, что

$$
{}_{\mathfrak{F}}\|Lu_n\|>n\cdot{}_{\mathfrak{U}}\|u_n\|,\ n\in\mathbb{Z}_+.
$$

Поэтому

$$
\frac{{}_{\mathfrak{F}}\|Lu_n\|}{n\cdot{}_{\mathfrak{U}}\|u_n\|}>1.
$$

Следовательно

$$
{}_{\mathfrak{F}}\|\frac{Lu_n}{n\cdot{}_{\mathfrak{U}}\|u_n\|}\|>1.
$$

Тогда

$$
{}_{\mathfrak{F}}\|L(\frac{u_n}{n\cdot{}_{\mathfrak{U}}\|u_n\|})\|>1.
$$

Пусть $y_n=\frac{u_n}{n\cdot{}_{\mathfrak{U}}\|u_n\|}$. Тогда

$$
{}_{\mathfrak{U}}\|y_n\|=\frac{{}_{\mathfrak{U}}\|u_n\|}{n\cdot{}_{\mathfrak{U}}\|u_n\|}=\frac{1}{n}.
$$

Поэтому $\frac{1}{n} \to 0$, когда $n \to \infty$. Итак $y_n \to 0$, когда $n \to \infty$. Но $Ly_n \nrightarrow 0 (Ly_n > 1)$.

Следовательно, L не является непрерывным, это противоречит предположению. Следовательно, оператор L ограниченный. •

Множество всех линейных $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ ограниченных операторов, отображающий пространство $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$, таких что $\operatorname{dom} L = \mathfrak{U}$ является линейным пространством, которое мы обозначим символом $\mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. На этом пространстве определим неотрицательную функцию

$$_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L\| = \sup_{\mathfrak{U}\|u\|=1} {}_{\mathfrak{F}}\|Lu\|.$$

Пусть $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства, операторы $T : \mathfrak{V} \to \mathfrak{F}$ и $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$, тогда формулой

$$Mu = T(Lu) \qquad (u \in \mathfrak{U})$$

определяется оператор $M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$, который называется *композицией* операторов T и L $(M = TL)$.

Лемма 1.2.2. *Пусть $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{F}$ – квазибанаховы пространства, операторы $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ и $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{V})$, тогда оператор M ограничен, т.е. $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, и*

$$_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|M\| = {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|TL\| \leq {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{F})}\|T\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})}\|L\|.$$

Утвеждение леммы, в силу определению квазинормы, очевидно следует из оценки

$$_{\mathfrak{F}}\|Mu\| = {}_{\mathfrak{F}}\|T(Lu)\| \leq {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{F})}\|T\|_{\mathfrak{V}}\|Lu\| \leq {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{V};\mathfrak{F})}\|T\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{V})}\|L\|_{\mathfrak{U}}\|u\|.$$

Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ называется *обратимым*, если существует оператор $L^{-1} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{U}$, такой что $L^{-1}L = \mathbb{I}_{\mathfrak{U}}$, $LL^{-1} = \mathbb{I}_{\mathfrak{F}}$. Обратимый оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ называется *непрерывно обратимым*, если $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$. Непрерывный оператор называется *топлинейным изоморфизмом*, если $\operatorname{dom} L^{-1} = \mathfrak{F}$.

Теорема 1.2.2. (аналог теоремы Банаха [21]). *Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, тогда биективный оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ — топлинейный изоморфизм.*

Последовательность $\{L_k\} \subset \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ называется *сильно сходящейся* к оператору $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$,если для любого $u \in \mathfrak{U}$ выполнено ${}_{\mathfrak{F}}\|L_k u - Lu\| \to 0,\ k \to \infty$; и *равномерно сходящейся*, если ${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L_k - L\| \to 0,\ k \to \infty$.

Теорема 1.2.3. *(аналог теоремы Банаха-Штейнгауза). Последовательность $\{L_k\} \subset \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ равномерно сходится к оператору $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ на некотором линеале $\overset{\circ}{\mathfrak{U}}$ плотном в $\mathfrak{U}$ точно тогда, когда*

(i) последовательность $\{L_k\}$ ограничена;

(ii) последовательность $\{L_k\}$ сильно сходится к L на $\overset{\circ}{\mathfrak{U}}$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) По условию $\{L_k\} \subset \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ равномерно сходится к $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ на некотором линеале $\overset{\circ}{\mathfrak{U}}$ плотном в $\mathfrak{U}$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}:\ \forall k > k_\varepsilon\ \forall u \in \overset{\circ}{\mathfrak{U}} \Rightarrow {}_{\mathfrak{U}}\|L_k u - Lu\| < \varepsilon.$$

Откуда ясно, что $\exists K > 0:\ {}_{\mathfrak{U}}\|L_k u\| \leq K\ \forall u \in \overset{\circ}{\mathfrak{U}}$. В силу того, что $\overset{\circ}{\mathfrak{U}}$ плотно в $\mathfrak{U}$ это неравенство можно продолжить на все пространство $\mathfrak{U}$. Таким образом (i) выполнено.

(ii) Так как $\{L_k\} \subset \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ равномерно сходится: ${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L_k - L\| \to 0,\ k \to \infty$ то для любого элемента $u \in \overset{\circ}{\mathfrak{U}},\ {}_{\mathfrak{F}}\|L_k u - Lu\| \to 0,\ k \to \infty$. Откуда получим, что $\{L_k\}$ сильно сходится к оператору $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$

опеределенному на $\overset{\circ}{\mathfrak{U}}$. В силу того, что пространство $\mathfrak{U}$ метризуемо, этот оператор продолжим на все пространство $\mathfrak{U}$.

($\Leftarrow$) Пусть теперь последовательность операторов $\{L_k\}$ ограничена, то есть $\exists K > 0 : \ {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L_k\| < K, \ \forall k \in \mathbb{N}$, и последовательность $\{L_k\}$ сильно сходится к $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ на плотном подмножестве $\overset{\circ}{\mathfrak{U}}\subset \mathfrak{U}$, то есть $\forall u \in\overset{\circ}{\mathfrak{U}}$, $\exists \lim\limits_{k\to\infty} L_k u = Lu$.

Надо показать, что $\{L_k\}$ равномерно сходится к $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Рассмотрим последовательность операторов $\{L_k - L\}$. По условию эта последовательность на $\overset{\circ}{\mathfrak{U}}$ сходится к нулевому оператору, продолжив на все пространство получим ${}_{\mathfrak{F}}\|L_k u - Lu\| = {}_{\mathfrak{F}}\|(L_k - L)u\| \leq$ $\leq {}_{\mathfrak{F}}\|L_k - L\|\|u\| \to 0$ на $\mathfrak{U}$ при $k \to \infty$. •

1.3. Линейные замкнутые операторы в квазибанаховых пространствах

Определение 1.3.1. Линейный оператор $L : \mathfrak{D} \to \mathfrak{F}(\mathfrak{D} \subset \mathfrak{U})$ называется *замкнутым*, если для любой последовательности $\{u_n\} \subset \mathfrak{D}$ такой,что $u_n \to u$ и $Lu_n \to y$ выполняется $u \in \mathfrak{D}$ и $y = Lu$.

Теорема 1.3.1. *Линейный оператор* $L : \mathfrak{D} \to \mathfrak{F}(\mathfrak{D} \subset \mathfrak{U})$ *является замкнутым, тогда и только тогда, когда его график* $graphL = \{(u,f) \in \mathfrak{U} \times \mathfrak{F} : f = Lu\}$ *замкнут по квазинорме* ${}_{graphL}\|u\| = {}_{\mathfrak{U}}\|u\| +_{\mathfrak{F}} \|Lu\|$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть L замкнутый линейный оператор. Чтобы показать, что его график $graphL$ замкнут, покажем, что $graphL$ содержит все свои предельные точки.

Пусть (u, f) любая предельная точка для $graphL$. Тогда существует последовательность точек в $graphL$, $\{(u_n, Lu_n)\}$, где $u_n \in \mathfrak{D}$, сходящихся к (u, f). Тогда

$$_{graphL}\|(u_n, Lu_n) - (u, f)\| \to 0.$$

Поэтому

$$_{graphL}\|(u_n - u, Lu_n - f)\| \to 0.$$

Следовательно

$$_{\mathfrak{U}}\|u_n - u\| +_{\mathfrak{F}} \|Lu_n - f)\| \to 0.$$

Тогда

$$_{\mathfrak{U}}\|u_n - u\| \to 0,_{\mathfrak{F}} \|Lu_n - f)\| \to 0.$$

Следовательно

$$u_n \to u, Lu_n \to f.$$

Поэтому

$$u \in \mathfrak{D}, Lu_n = f.$$

Следовательно

$$(u, f) \in graphL.$$

То есть любая предельная точка $graphL$ принадлежит $graphL$. Следовательно множество $graphL$ замкнуто.

($\Leftarrow$) Пусть график $graphL$ замкнут. Покажем, что L – замкнутый линейный оператор. Пусть $u_n \in \mathfrak{D}$, $u_n \to u$ и $Lu_n \to f$.

Тогда нетрудно увидеть, что (u, f) является подмножеством $graphL$, так что $(u, f) \in \overline{graphL}$. Но $\overline{graphL} = graphL$. Следовательно $(u, f) \in graphL$. Итак из определения $graphL$, имеем $u \in \mathfrak{D}$ и $f = Lu$. Следовательно L – замкнутый линейный оператор. •

Теорема 1.3.2. *Если оператор* $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, *то* L *– замкнутый оператор.*

Доказательство. Оператор L непрерывен, то есть для любой последовательности $\{u_k\} \in \mathfrak{U}$ такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = u$, выполняется $\lim\limits_{k\to\infty} Lu_k = L(u)$. Откуда ясно, что график оператора L замкнут. •

Теорема 1.3.3. *Пусть линейный оператор* $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ *замкнут и область определения* $domL = \mathfrak{U}$. *Тогда* $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Доказательство. Поскольку оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ замкнут, то есть $\forall\{u_k\} \in \mathfrak{U}$ такой, что $u_k \to u$ и $L(u_k) \to v$, следует, что $u \in \mathfrak{U}$ и $L(u) = v$. Получаем, что $\lim\limits_{k\to\infty} L(u_k) = L(\lim\limits_{k\to\infty} u_k)$, а следовательно $\lim\limits_{k\to\infty} L(u_k) = Lu$ и $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = u$. Что и дает нам определение непрерывного оператора L. •

Теорема 1.3.4. *Пусть оператор* $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ *и существует оператор* $L^{-1} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{U}$. *Тогда* L^{-1} *– замкнутый оператор.*

Доказательство. Поскольку оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ замкнут, то есть $\forall\{u_k\} \in \mathfrak{U}$ такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = u$ и $\lim\limits_{k\to\infty} Lu_k = v$, следует, что $u \in \mathfrak{U}$ и $Lu = v$.

Пусть $Lu_k = v_k$, тогда $\lim\limits_{k\to\infty} v_k = v$. Откуда получаем, что $u = L^{-1}v$, а следовательно $u_k = L^{-1}v_k$ и $\lim\limits_{k\to\infty} L^{-1}v_k = L^{-1}(\lim\limits_{k\to\infty} v_k) = L^{-1}(v)$.

Таким образом, получаем, что L^{-1} непрерывный оператор. Откуда в силу теоремы 1.3.1 ясно, что L^{-1} – замкнутый оператор. •

Линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ называется *плотно определенным,* если замыкание линеала $\overline{domL} = \mathfrak{U}$. Линеал замкнутых плотно определенных операторов обозначим символом $\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Пример 1.3.1. Пусть $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$; рассмотрим оператор $\Lambda^2 u = \{\lambda_k^2 u_k\}$, где $\{u_k\} \subset \mathfrak{U}$, а монотонная последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ такова, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Как нетрудно видеть, оператор $\Lambda^2 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $dom\Lambda^2 = \ell_q^{m+4}$, причем $\Lambda^2 : \ell_q^{m+4} \to \ell_q^m$ – топлинейный изоморфизм.

Теорема 1.3.5. *Пусть оператор $\widetilde{L} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, и его квазинорма*

$$\|\widetilde{L}\| = \sup_{u\in \mathrm{dom} M\setminus\{0\}} \frac{{}_{\mathfrak{F}}\|\widetilde{L}u\|}{{}_{\mathfrak{U}}\|u\|} < +\infty.$$

Тогда он единственным образом продолжим до оператора $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем ${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L\| = \|\widetilde{L}\|$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $u_0 \in \mathfrak{U}$. Тогда существует последовательность $\{u_n\} \subset \mathrm{dom}\, L$, такая, что $u_n \to u_0$. Тогда последовательность $\{Lu_n\}$ фундаментальна и существует $f_0 \in \mathfrak{F}$, такой что $\{Lu_n\} \to f_0$. Причем, этот предел не зависит от выбора последовательности. Положим $\widetilde{L}u_0 = f_0 = \lim\limits_{n\to\infty} Lu_n$ и таким образом доопределим по непрерывности оператор L.

Покажем непрерывность оператора $\widetilde{L}$. Пусть $u_0, u_0' \in \mathfrak{U}$, тогда $u_n \to u_0$, $u_n' \to u_0'$, $u_n, u_n' \in \mathrm{dom}\, L$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Для любого $v' \in \mathrm{dom} L$ по любому $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta > 0$ так, чтобы для любых $v \in \mathrm{dom} L$ с условием ${}_{\mathfrak{U}}\|v' - v\| < \delta$ выполнялось ${}_{\mathfrak{F}}\|Lv' - Lv\| < \varepsilon$. Если ${}_{\mathfrak{U}}\|u_0' - u_0\| < \delta$, то для достаточно больших номеров n выполнено ${}_{\mathfrak{U}}\|u_n' - u_n\| < \delta$ и, следовательно,

$${}_{\mathfrak{F}}\|Lu_n' - Lu_n\| < \varepsilon.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу, получим ${}_{\mathfrak{F}}\|\widetilde{L}u_0' - \widetilde{L}u_0\| \leq \varepsilon$. То есть оператор $\widetilde{L}$ непрерывен на $\mathfrak{U}$.

Единственность такого продолжения следует из единственности предела. В дальнейшем такое продолжение будем обозначать также как исходный оператор.

Равенство квазинорм выполняется по построению продолжения.

$\bullet$

1.4. Функции линейных ограниченных операторов

Пусть $\mathfrak{F}$ — квазибанахово пространство, $\mathcal{L}(\mathfrak{F})(\equiv \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{F}))$ — квазибанахово пространство линейных ограниченных операторов.

Теорема 1.4.1. *[21] Пусть $\mathfrak{F}$ — квазибанахово пространство, оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ и ${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M\| < 1/C$. Тогда оператор $T = \mathbb{I}_{\mathfrak{F}} - M$ непрерывно обратим и*

$${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|T^{-1}\| \leq \frac{C}{1 - C\cdot{}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M\|},$$

где C — константа из определения квазинормы.

Определение 1.4.1. Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *регулярной точкой* оператора $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, если существует оператор $R_\lambda(M) = (\lambda\mathbb{I} - M)^{-1}$ (*резольвента* оператора M). Множество регулярных точек $\rho(M)$ оператора M называется *резольвентным множеством* оператора M.

Определение 1.4.2. Комплексное число λ, не являющееся регулярным называется *спектральной точкой* или спектральным значением оператора M. Множество спектральных точек $\sigma(M)$ называется *спектром* оператора M. Таким образом, $\sigma(M) = \mathbb{C} \setminus \rho(M)$.

Спектр всегда непуст, замкнут и лежит в круге $|\lambda| \leq C\cdot{}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M\|$. Точнее, *спектр $\sigma(M)$ лежит в круге, радиус которого равен $C \cdot r_M$,* где

$$r_M = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M^n\|}.$$

При $|\lambda| > C \cdot r_M$ всегда существует резольвента и $R_\lambda(M) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{M^k}{\lambda^{k+1}}$. Для резольвенты выполняется *тождество Гильберта*

$$R_\lambda(M) - R_\mu(M) = (\mu - \lambda) R_\lambda(M) R_\mu(M), \quad \lambda, \mu \in \rho(M), \qquad (1.4.2)$$

которое проверяется непосредственно.

Теорема 1.4.2. *[21] Пусть $\mathfrak{F}$ – квазибанахово пространство, оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$. Тогда резольвентное множество $\rho(M)$ открыто, а резольвента $R_\lambda(M)$ оператора M является аналитической функцией переменной $\lambda \in \mathbb{C}$ в окрестности регулярной точки $\mu \in \rho(M)$, причем для $|\mu - \lambda| < 1/(C \cdot_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|R_\mu(M)\|)$ справедливо*

$$R_\lambda(M) = R_\mu(M) + \sum_{k=1}^{\infty} (\mu - \lambda)^k R_\mu^{k+1}(M). \qquad (1.4.3)$$

Интегралы в квазибанаховых пространствах

Пусть $\mathfrak{F}$ – квазибанахово пространство, функция $f(t)$ определена на $[0, \tau]$ со значениями в $\mathfrak{F}$. Стандартным образом можно определить *интеграл Римана* от функции f по отрезку $[0, \tau]$. При этом, если интеграл существует как предел соответствующих интегральных сумм, то функция f называется интегрируемой по Риману.

В [81, теорема 3.5.1] доказано, что интегрируемость непрерывной функции имеет место только в локально-выпуклых пространствах. Однако [81, теорема 3.5.2], если пространство $\mathfrak{F}$ – квазисоболево пространство последовательностей, тогда любая аналитическая функция, определенная на $[0, \tau]$ со значениями в $\mathfrak{F}$, интегрируема по Риману.

Пусть D – некоторая область в $\mathbb{C}$. Пусть вектор-функция $f(z)$ определена на D и принимает значения в квазибанаховом пространстве последовательностей $\mathfrak{F}$. Аналогично функции действительного аргумента, будем говорить, что $f(z)$ *аналитична в* D, если для любого $z_0 \in D$ существует окрестность $\mathcal{O}_{z_0}$, в которой функция $f(z)$ может быть представлена как сумма степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n, \qquad f_n \in \mathfrak{F}.$$

Степенной ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где $a \in \mathbb{C}$, элементы $c_n \in \mathfrak{F}$, будем называть *рядом Лорана.* Если вектор-функция представима сходящимся рядом Лорана в некоторой проколотой окрестности точки $a \in \mathbb{C}$, то *вычетом* функции в этой точке назовем коэффициент c_{-1} лорановского разложения. Классификацию изолированных особых точек будем понимать также, как в теории функций комплексного переменного.

Интеграл от вектор-функции $f(z)$ *по замкнутому гладкому контуру* $\Gamma \subset \mathbb{C}$ будем понимать как сумму вычетов в изолированных особых точках, лежащих внутри контура Γ, умноженную на коэффициент $2\pi i$. Очевидно, что для аналитических вектор-функций справедлива классическая теорема Коши о равенстве нулю интеграла по замкнутому контуру.

Пусть $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, обозначим через K_M класс всех функций $\varphi(\lambda)$ комплексного переменного, *кусочно-аналитических на спектре* $\sigma(M)$. Это означает, что функция $\varphi \in K_M$, если она обладает следующими свойствами:

1) область определения функции $\varphi(\lambda)$ состоит из конечного числа открытых связных компонент, объединение которых содержит спектр $\sigma(M)$ оператора M, причем каждая компонента содержит по крайней мере одну точку спектра;

2) функция $\varphi(\lambda)$ кусочно-аналитична, то есть аналитична в каждой компоненте своей области определения.

Если две функции $\varphi_1(\lambda)$, $\varphi_2(\lambda) \in K_M$ совпадают в некоторой открытой окрестности спектра $\sigma(M)$, то, очевидно, они будут аналитическим продолжением друг друга. Такие функции считаются равными.

Для $\varphi \in K_M$ всегда найдется гладкий, сложный, вообще говоря, контур Γ_M, охватывающий спектр $\sigma(M)$. Другими словами, Γ_M распадается на конечное число границ некоторых открытых множеств, объединение которых принадлежит области определения φ и накрывает спектр $\sigma(M)$, каждый из жордановых контуров "положительно" ориентирован, т. е. так, чтобы при движении в заданном направлении по контуру соответствующее множество оставалось слева. После этого положим для $\varphi \in K_M$

$$\varphi(M) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_M} \varphi(\lambda) R_\lambda(M) d\lambda.$$

Из теоремы Коши следует независимость интеграла от выбора контура. В частности, операторная экспонента e^{Mt} и сам оператор M задаются следующим образом:

$$e^{Mt} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_M} e^{\lambda t} R_\lambda(M) d\lambda, \qquad M = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_M} \lambda R_\lambda(M) d\lambda.$$

Рассмотрим оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, спектр которого образует несвязное множество. Замкнутую часть спектра, имеющую в нем замкнутое дополнение, называют *спектральным множеством.*

Предположим, что

$$\sigma(M) = \bigcup_{k=1}^{m} \sigma_k(M),$$

где $\sigma_k(M)$ $(k = \overline{1, m})$ – непересекающиеся спектральные множества. Будем считать, что контур Γ_M состоит из непересекающихся частей Γ_k $(k = \overline{1, m})$, каждая из которых окружает область G_k, содержащую соответствующее спектральное множество $\sigma_k(M)$.

Зададим функции $\varphi_k(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda \in G_k, \\ 0, & \text{если } \lambda \in G_j, \quad j \neq k. \end{cases}$

Функции $\varphi_k \in K_M$ $(k = \overline{1, m})$, и поэтому имеют смысл операторы

$$P_k = \varphi_k(M) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_M} \varphi_k(\lambda) R_\lambda(M) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_M} R_\lambda(M) d\lambda.$$

Последний интеграл в этом равенстве известен под названием *интеграл Ф. Рисса.*

Поскольку в области $G = \bigcup\limits_{k=1}^{m} G_k$ выполняются соотношения

$$\varphi_k(\lambda)\varphi_j(\lambda) = \delta_{kj}\varphi_k(\lambda),$$

(δ_{kj} – символ Кронекера); $\sum\limits_{k=1}^{m} \varphi_k(\lambda) \equiv 1$, справедливы равенства

$$P_k P_j = 0 \ (k \neq j); \ P_k^2 = P_k; \ \sum_{k=1}^{m} P_k = I.$$

Пусть область D ограничена кусочно-гладкой кривой Γ, проходящей через особую точку $z = \infty$. Обозначим через K_ε круг $\|z\| > \frac{1}{\varepsilon}$. Через D_ε обозначим область D, лежащую вне K_ε, через Γ_ε – часть Γ, лежащую вне K_ε, через γ_ε – часть границы K_ε, лежащую в Γ.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D, за исключением полюсов $z_1, z_2, ..., z_n, ...$ и непрерывна вплоть до границы, за исключением точки $z = a$. Если

$$\int\limits_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz \to 0 \ (\varepsilon \to 0),$$

то *несобственный интеграл от* $f(z)$ *по* Γ определим следующим образом

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Res}_{z=z_k} f(z),$$

при условии, что ряд в правой части сходится в квазибанаховом пространстве последовательностей.

1.5. Квазисоболевы пространства и квазиоператоры Лапласа и Грина

Квазисоболевы пространства

Пусть $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ — пространство Соболева, а W_2^{-1} — сопряженное к нему относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $L_2(\Omega)$ пространство с негативной нормой. Из теоремы вложения Соболева вытекает, что

$$\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow W_2^{-1}(\Omega). \qquad (1.5.1)$$

Также хорошо известно, что оператор Лапласа $-\Delta$, определяемый формулой

$$-\langle \Delta u, v \rangle = \sum_{m=1}^{n} \int_\Omega u_{x_m} v_{x_m} dx,$$

задает топлинейный изоморфизм :

$$-\Delta \ : \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega) \ \to \ W_2^{-1}(\Omega). \qquad (1.5.2)$$

Далее, пусть $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ — множество собственных значений оператора Лапласа $-\Delta$, занумерованное по неубыванию с учетом их кратности. Построим пространства:

$$\ell_2^1 = \left\{ u = \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |u_k|^2 < +\infty \right\},$$

$$\ell_2^{-1} = \left\{ u = \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} |u_k|^2 < +\infty \right\}$$

и отметим топлинейные изоморфизмы $\ell_2^1 \cong \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\ell_2^{-1} \cong W_2^{-1}(\Omega)$, а также плотность и непрерывность вложений

$$\ell_2^1 \hookrightarrow \ell_2 \hookrightarrow \ell_2^{-1}, \tag{1.5.3}$$

вытекающие из (1.5.1). Отметим банаховость пространств ℓ_2^1 и ℓ_2^{-1} с нормами $\|u\|_1^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k |u_k|^2$ и $\|v\|_{-1}^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} |v_k|^2$ соответственно.

Введем в рассмотрение квазиоператор Лапласа

$$\Lambda u = \{\lambda_k u_k\}. \tag{1.5.4}$$

Поскольку $\|\Lambda u\|_{-1} = \|u\|_1$, то из (1.5.4) следует топлинейность изоморфизма $\Lambda : \ell_2^1 \to \ell_2^{-1}$, который, впрочем, легко получить из (1.5.2), (1.5.3). Обратный к Λ оператор (квазиоператор Грина Λ^{-1}) задается формулой

$$\Lambda^{-1} v = \{\lambda_k^{-1} v_k\}. \tag{1.5.5}$$

Данная часть посвящена перенесению описанной выше идеологии на квазибанаховы пространства ℓ_p, $p \in (0,1)$. Построим квазисоболевы пространства:

$$\ell_p^1 = \left\{ u = \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{p/2} |u_k|^p < +\infty \right\},$$

$$\ell_p^{-1} = \left\{ u = \{u_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-p/2} |u_k|^p < +\infty \right\},$$

где $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ — монотонно возрастающая последовательность такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$, а $p \in (0,1)$.

По аналогии с пространствами Соболева W_p^m введем в рассмотрение квазисоболевы пространства

$$\ell_p^m = \left\{ u = \{u_k\} \subset \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k| \right)^p < +\infty \right\},$$

где $m \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}_+$. Пространства ℓ_p^m квазибанаховы при всех $m \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}_+$ с квазинормой

$$_p^m\|u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k| \right)^p \right)^{1/p},$$

причем они тоже банаховы только если $p \in [1, +\infty)$. Если $p \in (0,1)$, то константа $C = 2^{(1-p)/p}$. Заметим еще, что если $m = 0$, то $\ell_p^0 = \ell_p$.

Теорема 1.5.1. *При всех $p \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{R}$, $l \leq m$, имеют место плотные и непрерывные вложения $\ell_p^m \hookrightarrow \ell_p^l$.*

Доказательство. Вложение $\ell_p^m \subset \ell_p^l$ очевидно. Докажем плотность вложения. Пусть $u \in \ell_p$, тогда рассмотрим последовательность $\{u_k\}$, где

$$u_1 = (u^1, 0, 0, \ldots),\ u_2 = (u^1, u^2, 0, 0, \ldots),\ \ldots$$
$$\ldots,\ u_k = (u^1, u^2, \ldots, u^k, 0, 0, \ldots), \ldots.$$

Очевидно, $\{u_k\} \subset \ell_p^m$, причем $u_k \to u$ в квазинорме l_p^l. Непрерывность вложения тоже очевидна.●

Теорема 1.5.2. *При всех $p \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{R}$ квазиоператор Лапласа $\Lambda : \ell_p^{m+2} \to \ell_p^m$ — топлинейный изоморфизм.*

Доказательство. Непрерывность оператора Λ очевидна –

$$ {}^{m}_{p}\|\Lambda u\| \;=\; \left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{(m/2)-1}|u_k|^p\right)^{1/p} = {}^{m+2}_{p}\|u\|. $$

Построим обратный оператор $\Lambda^{-1}u = \lambda_k^{-1}u_k$ (квазиоператор Грина). Очевидно, $\Lambda\Lambda^{-1}u = u$ при всех $u \in \ell_p^{-1}$, и $\Lambda^{-1}\Lambda u = u$ при всех $u \in \ell_p^m$. Далее,

$$ {}^{m+2}_{p}\|\Lambda^{-1}u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{(m/2)+1}|u_k|^p\right)^{1/p} = {}^{m}_{p}\|u\|.\bullet $$

Пример 1.5.1. Пусть $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$; $Q_n(\lambda)$ – многочлен степени n. Рассмотрим оператор $Q_n(\Lambda)u = \{Q_n(\lambda_k)u_k\}$, $n \in \mathbb{N}$, где $\{u_k\} \subset \mathfrak{U}$, а монотонная последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ такова, что $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k = +\infty$. Как нетрудно видеть, оператор $Q_n(\Lambda) \in Cl(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $\mathrm{dom}Q_n(\Lambda) = \ell_q^{m+2n}$, причем $Q_n(\Lambda) :\ell_q^{m+2n} \to \ell_q^m$ – топлинейный изоморфизм.

2. Вырожденные полугруппы операторов в квазисоболевых пространствах

2.1. Относительные резольвенты

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – квазибанаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Рассмотрим L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M.

Замечание 2.1.1. Если пространства $\mathfrak{U} = \mathfrak{F}$, а оператор $L = \mathbb{I}$, то $\rho^L(M)$ и $\sigma^L(M)$ совпадают с классическим определением резольвентного множества и спектра оператора M соответственно.

Замечание 2.1.2. Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$, то L-резольвентное множество и L-спектр оператора M совпадают с резольвентным множеством и спектром оператора $L^{-1}M$ (или оператора ML^{-1}).

Замечание 2.1.3. Пусть пространства $\mathfrak{U} = \mathfrak{F}$. Если оператор L непрерывно обратим, а оператор $M = \mathbb{I}$, то $\rho^L(M) = \rho(L^{-1})$ и $\sigma^L(M) = \sigma(L^{-1})$.

Лемма 2.1.1. *Множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, и, следовательно, $\sigma^L(M)$ всегда замкнут.*

Доказательство. Пусть $\mu \in \rho^L(M)$, тогда из равенства

$$\lambda L - M = (\mu L - M) + (\lambda - \mu)L \tag{2.1.1}$$

вытекает, что и круг

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda - \mu| < \big(C\cdot_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}\|(\mu L - M)^{-1}L\|\big)^{-1}\} \tag{2.1.2}$$

с центром в точке μ тоже содержится в $\rho^L(M)$.

Таким образом, множество $\rho^L(M)$ открыто. Доказательство, что $\sigma^L(M)$ замкнут очевидно. •

Определение 2.1.1. Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$, тогда оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ называются соответственно *L-резольвентой, правой и левой L-резольвентами* оператора M.

Замечание 2.1.4. В случае, когда оператор L непрерывно обратим, то правая (левая) L-резольвента оператора M совпадает с резольвентой оператора $L^{-1}M$ (ML^{-1}).

Пусть $\mu \in \rho^L(M)$, тогда из тривиальных тождеств:

$$(\lambda L - M)(\mu L - M)^{-1} = \mathbb{I} + (\lambda - \mu)L(\mu L - M)^{-1},$$

$$(\mu L - M)^{-1}(\lambda L - M) = \mathbb{I} + (\lambda - \mu)(\mu L - M)^{-1}L \tag{2.1.3}$$

справедливы L-резольвентные тождества, являющиеся аналогами тождества Гильберта:

$$(\lambda L - M)^{-1} - (\mu L - M)^{-1} = (\mu - \lambda)(\mu L - M)^{-1}L(\lambda L - M)^{-1}, \tag{2.1.4}$$

$$R^L_\lambda(M) - R^L_\mu(M) = (\mu - \lambda)R^L_\mu(M)R^L_\lambda(M), \tag{2.1.5}$$

$$L^L_\lambda(M) - L^L_\mu(M) = (\mu - \lambda)L^L_\mu(M)L^L_\lambda(M). \tag{2.1.6}$$

Отметим еще два полезных тождества:

$$LR^L_\mu(M) = L^L_\mu(M)L, \tag{2.1.7}$$

$$MR^L_\mu(M) = L^L_\mu(M)M. \tag{2.1.8}$$

Лемма 2.1.2. *[21]Пусть операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, тогда L-резольвента, правая и левая L-резольвенты оператора M непрерывны в $\rho^L(M)$.*

Теорема 2.1.1. *[21]Пусть операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, тогда L-резольвента, правая и левая L-резольвенты оператора M голоморфны в $\rho^L(M)$.*

Замечание 2.1.5. В силу равенств (2.1.5)((2.1.6)), доказательство того, что правая (левая) L-резольвенты оператора M голоморфны в $\rho^L(M)$ очевидно.

Замечание 2.1.6. Из тождеств (2.1.4) – (2.1.6)видно, что производными L-резольвенты, правой и левой L-резольвент будут, соответственно, функции $-(\mu L - M)^{-1}L(\mu L - M)^{-1}, \quad -(R^L_\mu(M))^2,$
$-(L^L_\mu(M))^2$.

Из тождеств (2.1.5), (2.1.6) вытекает также, что правые (левые) L-резольвенты коммутируют. Отметим еще два полезных тождества:

$$L(\mu L - M)^{-1}M = M(\mu L - M)^{-1}L, \tag{2.1.9}$$

получающееся из (2.1.3),

$$(\mu L - M)^{-1}L(\lambda L - M)^{-1} = (\lambda L - M)^{-1}L(\mu L - M)^{-1}, \tag{2.1.10}$$

следующее из (2.1.4). Они справедливы при любых $\lambda, \mu \in \rho^L(M)$. Тождество (2.1.9) выполняется не только на линеале $\mathrm{dom}M$, но и на всем пространстве $\mathfrak{U}$, если под записью $(\mu L - M)^{-1}M$ мы будем понимать замыкание композиции операторов M и $(\mu L - M)^{-1}$, равное, как нетрудно заметить, оператору $\mu R^L_\mu(M) - I$.

Лемма 2.1.3. *Пусть* $\lambda, \mu \in \rho^L(M)$, *тогда*

(i) $\ker R^L_\lambda(M) = \ker L, \quad \mathrm{im} R^L_\lambda(M) = \mathrm{im} R^L_\mu(M)$ *;*

(ii) $\ker L^L_\lambda(M) = \{M\varphi : \varphi \in \ker L \bigcap \mathrm{dom} M\}, \quad \mathrm{im} L^L_\lambda(M) = \mathrm{im} L^L_\mu(M)$.

Доказательство. (i) В силу линейности оператора $(\lambda L - M)^{-1}$ понятно, что $\ker L \subset \ker R^L_\lambda(M)$. Обратное включение также легко получить. Пусть $R^L_\lambda(M)u = 0$, тогда $Lu = (\lambda L - M)0 = 0$.

Покажем, что $\mathrm{im} R^L_\lambda(M) \subset \mathrm{im} R^L_\mu(M)$. Пусть $u \in \mathrm{im} R^L_\lambda(M)$, т.е. $\exists f_1 : R^L_\lambda(M) f_1 = u$. В силу тождества (2.1.5)

$$u - R^L_\mu(M) f_1 = (\mu - \lambda) R^L_\mu(M) u.$$

Отсюда

$$R^L_\mu(M)(f_1 + (\mu - \lambda)u) = u.$$

То есть существует

$$f_2 = f_1 + (\mu - \lambda)u,$$

что $R^L_\mu(M) f_2 = u \Rightarrow u \in \mathrm{im} R^L_\mu(M)$. Поменяв местами λ и μ, получим обратное включение.

(ii) Если $L^L_\mu(M) f = 0$, то $Lv = 0$, где $v = (\mu L - M)^{-1} f$. Отсюда $f = (\mu L - M)v = Mu$, где $u = -v \in \ker L$. Докажем обратное включение: $f = Mu = M(-v) = (\mu L - M)v$. Отсюда $L^L_\mu(M) f = L(-u) = 0$, так как $u \in \ker L$. •

Определение 2.1.2. Пусть $\ker L \neq \{0\}$, вектор $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$ будем называть *собственным вектором* оператора L. Упорядоченное множество векторов $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ называется *цепочкой M-присоединенных векторов* собственного вектора φ_0, если

$$L\varphi_{q+1} = M\varphi_q, \quad q = 0, 1, ..., \quad \varphi_l \notin \ker L \setminus \{0\}, l = 1, 2, ... \quad (2.1.11)$$

Порядковый номер вектора в цепочке будем называть его *высотой*. Линейную оболочку собственных и M-присоединенных векторов оператора L назовем его *M-корневым линеалом. M-корневым пространством* будем называть замкнутый M-корневой линеал оператора L.

Замечание 2.1.7. Если существует оператор $M^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$, то приведенная выше терминология совпадает со стандартной.

Замечание 2.1.8. Можно утверждать, что вектор φ является M-присоединенным вектором высоты q оператора L точно тогда, когда он является присоединенным вектором оператора $R^L_\mu(M)$ той же высоты q.

Замечание 2.1.9. Цепочка M-присоединенных векторов может быть бесконечной. В частности, она может быть заполнена нулями, если $\varphi_0 \in \ker M \bigcap \ker L$. Но она будет конечной в случае существования такого M-присоединенного вектора φ_q, что либо $\varphi_q \notin \mathrm{dom} M$, либо $M\varphi_q \notin \mathrm{im} L$.

Высоту q последнего M-присоединенного вектора в конечной цепочке $\{\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_q\}$ будем называть *длиной* этой цепочки.

2.2. Относительно секториальный оператор

Пусть по-прежнему, пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ квазибанаховы, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F}), \quad M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Определение 2.2.1. Оператор M называется *секториальным относительно* оператора L (короче, *L-секториальным*), если существуют константы $K > 0, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \theta \in (\pi/2, \pi)$ такие, что сектор

$$S^L_{a,\theta}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta, \quad \mu \neq a\} \subset \rho^L(M), \qquad (2.2.1)$$

причем

$$\max\left\{_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \left\| R^L_\mu(M) \right\|, _{\mathcal{L}(\mathfrak{F})} \left\| L^L_\mu(M) \right\|\right\} \leq \frac{K}{|\mu - a|} \qquad (2.2.2)$$

$$\forall \mu \in S^L_{a,\theta}(M).$$

Замечание 2.2.1. L-секториальный оператор в терминологии [85] является $(L, 0)$-секториальным.

Секториальным будем называть оператор $S \in \mathcal{C}l(\mathfrak{V})$, удовлетворяющий необходимому и достаточному условиям аналитической версии теоремы Хилле-Иосиды-Феллера-Филлипса-Миядеры, т.е. для которого выполняется:

$$\exists a \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad K > 0 :$$

$$S_{a,\theta}(S) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta, \quad \mu \neq a\} \subset \rho(S),$$

$$\forall \mu \in S_{a,\theta}(S) \quad _{\mathcal{L}(\mathfrak{V})} \|R_\mu(S)\| \leq \frac{K}{|\mu - a|}, \qquad (2.2.3)$$

где $\rho(S)$ – резольвентное множество, а $R_\mu(S) = (\mu I - S)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ – резольвента оператора S.

Замечание 2.2.2. Не теряя общности, можно положить $a = 0$ в определении 2.1.1 (и в определении секториального оператора), так как если $a = b \neq 0$ для оператора $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, то $a = 0$ для оператора $\tilde{M} = M - bL \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Переобозначим $\tilde{M} = M, \quad S^L_{0,\theta}(\tilde{M}) = S^L_\theta(M)$.

Замечание 2.2.3. Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$, то секториальность оператора $L^{-1}M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U})$ (или, что равносильно, оператора $ML^{-1} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{F})$, поскольку $R_\mu(L^{-1}M) = L^{-1}R_\mu(ML^{-1})L$, является необходимым и достаточным условием L-секториальности оператора M. Оценка (2.2.2) следует из (2.2.3) и соотношений

$$R^L_\mu(M) = R_\mu(L^{-1}M), \quad L^L_\mu(M) = R_\mu(ML^{-1}).$$

Замечание 2.2.4. Если оператор M (L,σ)-ограничен и бесконечность – устранимая особая точка L-резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$, то оператор M L-секториален.

Лемма 2.2.1. *Пусть оператор M L-секториален. Тогда оператор L не имеет M-присоединенных векторов.*

Доказательство. Пусть φ – M-присоединенный вектор высоты 1 оператора L. Тогда, согласно замечанию 2.1.7, $\varphi_0 = R^L_\mu(M)\varphi$, где $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$, а μ можно взять из сектора $S^L_\theta(M)$. Отсюда

$${}_{\mathfrak{U}}\|\varphi_0\| \leq {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}\|R^L_\mu(M)\| \times {}_{\mathfrak{U}}\|\varphi\| \leq \frac{K_{\mathfrak{U}}\|\varphi\|}{|\mu|}.$$

Устремляем $|\mu| \to \infty$, получаем $\varphi_0 = 0$. Противоречие. •

Лемма 2.2.2. *Пусть оператор M L-секториален. Тогда $\forall \mu \in \rho^L(M)$*

$$\ker R^L_\mu(M) \cap \mathrm{im} R^L_\mu(M) = \{0\},$$

$$\ker L^L_\mu(M) \cap \mathrm{im} L^L_\mu(M) = \{0\}.$$

Доказательство. Возьмем ненулевой вектор $\varphi \in \ker R^L_\mu(M) \cap \mathrm{im} R^L_\mu(M)$. Тогда $\varphi = R^L_\mu(M)\psi$ при некотором $\psi \in \mathfrak{U}$. Следовательно, вектор φ в то же время является собственным вектором оператора L. Значит $R^L_\mu(M)\varphi = 0$. Отсюда следует, что $(R^L_\mu(M))^2\psi = 0$, т.е. ψ – присоединенный вектор высоты оператора $R^L_\mu(M)$. Используя замечание 2.1.7 , получим, что ψ M-присоединенный вектор оператора L, соответствующий собственному вектору φ. Это противоречит L-секториальности оператора M (лемма 2.2.1).

Пусть вектор $f \in \ker L^L_\mu(M) \cap \mathrm{im} L^L_\mu(M), \quad f \neq 0$. Тогда $f = L^L_\mu(M)g$ при некотором $g \in \mathfrak{F}$. Кроме того, $L^L_\mu(M)f = 0$, отсюда $(L^L_\mu(M))^2g = 0$. Поэтому $(\mu L - M)^{-1}g \in \ker(R^L_\mu(M))^2$, т.е. собственный вектор или присоединенный вектор высоты 1. В силу леммы 2.2.1 это собственный вектор. Тогда $R^L_\mu(M)(\mu L - M)^{-1}g = 0$. Это означает, что $f = (\mu L - M)0 = 0$. Противоречие. •

Пример 2.2.1. Пусть здесь и далее $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2n}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$, $Q_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n c_i\lambda^i$ и $R_s(\lambda) = \sum_{j=0}^s d_j\lambda^j$ – многочлены с действительными коэффициентами, не имеющие общих корней, степеней n и s, соответственно, причем $n < s$ и $d_s c_n < 0$. Построим операторы $L = Q_n(\Lambda)$, $M = R_s(\Lambda)$, как в примере 1.5.1.

Лемма 2.2.3. *Оператор M из примера 2.2.1 L-секториален.*

Доказательство. Очевидно, что L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M состоит из точек $\mu_k = R_s(\lambda_k)(Q_n(\lambda_k))^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$: λ_k – не корень многочлена $Q_n(\lambda)$, с учетом их кратности. Все точки относительного спектра располагаются на действительной оси и сгущаются только к $-\infty$, то есть при $a = \max\limits_k \mu_k$, $\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha$, при фиксированном $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, выполнено условие (2.2.1) из определения 2.2.1.

Далее,

$$ {}_{q}^{m+2n}\|R_{\mu}^{L}(M)u\|^{q} \leq C^{q}\sum{}' \frac{|<u,e_k>|^{q}\cdot {}_{q}^{m+2n}\|e_k\|^{q}}{|\mu-\mu_k|^{q}} = $$

$$ = C^{q}\sum{}' \frac{|<u,e_k>|^{q}\cdot(\lambda_k)^{\frac{m+2n}{2}q}}{|\mu-\mu_k|^{q}} = C^{q}\sum{}' \frac{1}{|\mu-\mu_k|^{q}}(|u_k|(\lambda_k)^{\frac{m+2n}{2}})^{q} \leq $$

$$ C^{q}\frac{1}{(\sin\theta)^{q}|\mu-a|^{q}}\sum{}'(|u_k|(\lambda_k)^{\frac{m+2n}{2}})^{q} \leq C^{q}\frac{1}{(\sin\theta)^{q}|\mu-a|^{q}}\cdot {}_{q}^{m+2n}\|u\|^{q}. $$

Здесь и далее штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых с такими номерами k, что λ_k – корень многочлена $Q_n(\lambda)$, C – константа из определения квазинормы, $a = \max \mu_k$. Следовательно, условие (2.2.2) из определения 2.2.1 также выполнено.●

2.3. Вырожденные голоморфные разрешающие полугруппы

Уравнения

$$ R_{\alpha}^{L}(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1}Mu \tag{2.3.1} $$

и

$$ L_{\alpha}^{L}(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1}f \tag{2.3.2} $$

при $\alpha \in \rho^{L}(M)$, эквивалентные линейному уравнению соболевского типа

$$ L\dot{u} = Mu, \tag{2.3.3} $$

будем рассматривать в рамках уравнения в квазибанаховом пространстве $\mathfrak{V}$

$$ A\dot{v} = Bv, \tag{2.3.4} $$

где операторы $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}), B \in \mathcal{C}l(\mathfrak{V})$.

Определение 2.3.1. *Решением* уравнения (2.3.4) будем называть функцию $v(t) \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathfrak{V})$, удовлетворяющую этому уравнению.

Определение 2.3.2. Отображение $V^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathfrak{V}))$ называется *полугруппой разрешающих операторов* (или просто *разрешающей полугруппой*) уравнения (2.3.4), если

(i) $V^s V^t = V^{s+t} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}_+$;

(ii) для любого $v_0 \in \mathfrak{V}$ функция $v(t) = V^t v_0$ будет решением этого уравнения.

Замечание 2.3.1. Наличие единицы у полугруппы не постулируется.

Полугруппа $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ называется
равномерно ограниченной, если

$$\exists M > 0 \quad \forall t > 0 \quad {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}\|V^t\| \leq M;$$

аналитической, если она аналитически продолжима в некоторый сектор, содержащий луч $\mathbb{R}_+$.

Теорема 2.3.1. *Пусть операторы L, M такие, как в примере 2.2.1, причем $\operatorname{Re} \mu_k \leq 0$. Тогда существует аналитическая в секторе $\{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta - \pi/2, \quad \tau \neq 0\}$, где θ из определения 2.2.1, и равномерно ограниченная разрешающая полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ $(\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\})$ уравнения* (2.3.1) ((2.3.2))*, причем задается она интегралами типа Данфорда-Тейлора*

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu \qquad (2.3.5)$$

$$(F^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu), \tag{2.3.6}$$

где контур Γ *удовлетворяет условию:*

$$\Gamma \subset S^L_\theta(M), \qquad \arg\mu \to \pm\theta \quad \textit{при} \quad |\mu| \to \infty. \tag{2.3.7}$$

Доказательство. Прежде всего отметим существование интеграла (2.3.5). Так как

$${}^{m+2n}_{q}\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho} R^L_\mu(M)e^{\mu t}ud\mu\| \leq$$

$$\leq C(\sum_{|\mu_k|>\frac{1}{\rho}} e^{\mathrm{Re}\mu_k qt}| < u, e_k > |^q \cdot {}^{m+2n}_{q}\|e_k\|^q)^{1/q} \leq$$

$$\leq Ce^{-\frac{1}{\rho}t}(\sum | < u, e_k > |^q \cdot (\lambda_k)^{\frac{m+2n}{2}q})^{1/q} = Ce^{-\frac{1}{\rho}t} \cdot {}^{m+2n}_{q}\|u\| \to 0 \text{ при } \rho \to 0,$$

и

$${}^{m+2n}_{q}\|U^t u\| = ({}^{m+2n}_{q}\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu\|)^{1/q} \leq$$

$$\leq C(\sum{}' e^{\mathrm{Re}\mu_k qt}| < u, e_k > |^q \cdot {}^{m+2n}_{q}\|e_k\|^q)^{1/q} =$$

$$= C(\sum{}' e^{\mathrm{Re}\mu_k qt}| < u, e_k > |^q \cdot (\lambda_k)^{\frac{m+2n}{2}q})^{1/q},$$

а последний ряд сходится, в силу $\mathrm{Re}\mu_k t < 0$ при достаточно больших $|\mu_k|$, $t > 0$, то интеграл U^t существует. Возможность аналитического продолжения этого интеграла в сектор $\{\tau \in \mathbb{C} : |\mathrm{arg}\tau| < \theta - \frac{\pi}{2}, \tau \neq 0\}$ легко выводится из неравенства $\cos(\mathrm{arg}\mu + \mathrm{arg}\tau) < 0$. Проверим выполнение условия (i) определения 2.3.2.

$$U^{s+t}u = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R^L_\mu(M)e^{\mu(s+t)}d\mu = \sum{}' e^{\mu_k(s+t)} < u, e_k > e_k =$$

$$= \sum^{\prime} e^{\mu_k s} e^{\mu_k t} < u, e_k > e_k.$$

С другой стороны,

$$U^s U^t u = \sum_k^{\prime} e^{\mu_k s} < \sum_j e^{\mu_j t} < u, e_j > e_j, e_k > e_k =$$

$$= \sum_k^{\prime} e^{\mu_k s} e^{\mu_k t} < u, e_k > e_k.$$

Проверим выполнение условия (ii) определения 2.3.2. Возьмем произвольный $u \in \mathfrak{U}$ и проверим, что $U^t u$ является решением уравнения (2.3.1).

$$R^L_\alpha(M)\dot{U}^t u = \sum_k^{\prime} \frac{< \sum_j e^{\mu_j t} \mu_j < u, e_j > e_j, e_k >}{\alpha - \mu_k} e_k =$$

$$= \sum_k^{\prime} \frac{e^{\mu_k t} \mu_k < u, e_k >}{\alpha - \mu_k} e_k = \sum_k^{\prime} \frac{e^{\mu_k t} \frac{R(\lambda_k)}{Q(\lambda_k)} < u, e_k >}{\alpha - \frac{R(\lambda_k)}{Q(\lambda_k)}} e_k =$$

$$= \sum_k^{\prime} \frac{e^{\mu_k t} \frac{R(\lambda_k)}{Q(\lambda_k)} < u, e_k >}{\alpha - \frac{R(\lambda_k)}{Q(\lambda_k)}} e_k = \sum_k^{\prime} \frac{e^{\mu_k t} R(\lambda_k) < u, e_k >}{\alpha Q(\lambda_k) - R(\lambda_k)} e_k =$$

$$= (\alpha L - M)^{-1} M u.$$

Установим равномерную ограниченность:

$${}^{m+2n}_{q}\|U^t u\| \le C\Big(\sum^{\prime} e^{\mathrm{Re}\mu_k q t} | < u, e_k > |^q \cdot (\lambda_k)^{\frac{m+2n}{2} q}\Big)^{1/q},$$

$$\le C\Big(\sum^{\prime} e^{\mathrm{Re}\mu_k q t} | < u, e_k > |^q \cdot {}^{m+2n}_{q}\|e_k\|^q\Big)^{1/q} \le$$

$$\le C e^{\max \mathrm{Re}\mu_k q t}\Big(\sum^{\prime} | < u, e_k > |^q \cdot {}^{m+2n}_{q}\|e_k\|^q\Big)^{1/q} \le$$

$$\le C^{m+2n}_{q}\|u\|.$$

Следовательно,

$${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}\|U^t\| \leq C. \bullet$$

Замечание 2.3.2. Если отказаться от ограничения $\mathrm{Re}\,\mu_k \leq 0$ (в этом случае константа $a \neq 0$ в определении L-ограниченности), то полугруппой уравнения $L\dot{u} = Mu$ будет

$$\{W^t = e^{at}U^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R^L_{\mu}(M)e^{(\mu+a)t}d\mu : t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Соответственно, для этой полугруппы вместо равномерной ограниченности будет иметь место экспоненциальная оценка

$$\forall t > 0 \quad {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}\|W^t\| \leq Me^{bt}.$$

Доказательство.

$${}^{m+2n}_{\;\;q}\|W^t u\| = e^{at}({}^{m+2n}_{\;\;q}\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R^L_{\mu}(M)e^{\mu t}d\mu\|)^{1/q} \leq$$

$$\leq Ce^{at}(\sideset{}{'}\sum e^{\mathrm{Re}\mu_k qt}| < u, e_k > |^q \cdot {}^{m+2n}_{\;\;q}\|e_k\|^q)^{1/q} =$$

$$= Ce^{(a+\max\mathrm{Re}\mu_k)t}(\sideset{}{'}\sum | < u, e_k > |^q \cdot (\lambda_k)^{\frac{m+2n}{2}q})^{1/q} \leq,$$

$$\leq Ce^{(a+\max\mathrm{Re}\mu_k)t} \;\cdot\; {}^{m+2n}_{\;\;q}\|u\|.$$

Следовательно,

$$\forall t > 0 \quad {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}\|W^t\| \leq Ce^{bt}. \bullet$$

Замечание 2.3.3. Если оператор степени многочленов $n = s$, то оператор M (L, σ)-ограничен, и ∞ – устранимая особая точка либо полюс порядка p L-резольвенты оператора M. Тогда полугруппы (2.3.5),(2.3.6) продолжаются до аналитических групп [21].

Замечание 2.3.4. В условиях теоремы 2.3.1 очевидны следующие соотношения:

$$LU^tu = F^tLu \quad \forall u \in \mathfrak{U},$$

$$MU^tu = F^tMu \quad \forall u \in \mathrm{dom}M \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

(второе следует из тождества (2.1.9)).

Из представлений (2.3.5), (2.3.6) разрешающих полугрупп уравнений (2.3.1), (2.3.2), видно, что их операторы имеют нетривиальные ядра $\ker U^t \supset \ker R^L_\mu(M), \quad \ker F^t \supset \ker L^L_\mu(M) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$.

Определение 2.3.3. *Ядром* аналитической полугруппы $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ будем называть множество

$$\ker V^\bullet = \{\varphi \in \mathfrak{V} : \exists t \in \mathbb{R}_+ \quad V^t\varphi = 0\}.$$

Образом этой полугруппы будем называть множество

$$\mathrm{im}V^\bullet = \{v \in \mathfrak{V} : \lim_{t \to 0+} V^tv = v\}.$$

Замечание 2.3.5. Из аналитичности полугруппы $\ker V^\bullet = \ker V^t \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$. Действительно, по определению $\ker V^\bullet = \bigcup\limits_{t>0} \ker V^t$. Докажем, что $\ker V^{t_1} = \ker V^{t_2} \quad \forall t_2 > t_1 > 0$. Так как $V^{t_2} = V^{t_2-t_1}V^{t_1}$, то $\ker V^{t_1} \subset \ker V^{t_2}$. Пусть $u \in \ker V^{t_2}$, рассмотрим функцию $v(t) = V^tu$. Она аналитическая в секторе, содержащем $\mathbb{R}_+$, и равна нулю при $t \geq t_2$ (по доказанному). По теореме о единственности аналитической функции $v(t) \equiv 0$ во всем секторе.

Из последнего замечания видно, что ядро аналитической полугруппы является подпространством.

Лемма 2.3.1. *Для аналитической полугруппы* $\{V^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ *имеем* $\ker V^\bullet \cap \mathrm{im} V^\bullet = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $v \in \ker V^\bullet \cap \mathrm{im} V^\bullet$. Тогда в силу замечания 2.3.5 $\forall t > 0 \quad V^t v = 0$. Поэтому $v = \lim\limits_{t \to 0+} V^t v = 0$.•

Обозначим $\mathfrak{U}^0 = \ker U^\bullet$, $\mathfrak{F}^0 = \ker F^\bullet$ и через $L_0 \quad (M_0)$ обозначим сужение оператора $L \quad (M)$ на $\mathfrak{U}^0 \quad (\mathfrak{U}^0 \cap \mathrm{dom} M)$.

Лемма 2.3.2. *В условиях теоремы 2.3.1*
операторы $L_0 \in \mathcal{L}(\ker U^\bullet; \ker F^\bullet), \quad M_0 : \ker U^\bullet \cap \mathrm{dom} M \to \ker F^\bullet$.

Доказательство. Из замечания 2.3.4 следует, что если $U^t u = 0$, то $0 = LU^t u = F^t L u \quad (0 = MU^t u = F^t M u) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \forall u \in \mathfrak{U} \quad (\forall u \in \mathrm{dom} M)$. •

Через $\sigma_0^L(M)$, как и прежде, будем обозначать L_0-спектр оператора M_0.

Лемма 2.3.3. *В условиях теоремы 2.3.1* $\sigma_0^L(M) = \{\infty\}$.

Доказательство. Возьмем $\lambda \in \mathbb{C}$. Рассмотрим оператор

$$(\lambda L_0 - M_0)^{-1} = \sum_{\lambda_k \in \ker Q} \frac{< \cdot, e_k >}{\lambda Q(\lambda_k) - R(\lambda_k)} e_k. \tag{2.3.8}$$

Для $f \in \mathfrak{F}^0$ имеем

$${}^m_q\|(\lambda L_0 - M_0)^{-1} f\| = {}^m_q\| \sum_{\lambda_k \in \ker Q} \frac{< f, e_k >}{\lambda Q(\lambda_k) - R(\lambda_k)} e_k \| \leq$$

$$\leq C(\sum_{\lambda_k \in \ker Q} \frac{| < f, e_k > |^q}{|\lambda Q(\lambda_k) - R(\lambda_k)|^q} \; {}^m_q\|e_k\|^q)^{1/q} \leq$$

$$\leq C(\sum_{\lambda_k \in \ker Q} \frac{| < f, e_k > |^q}{|\lambda Q(\lambda_k) - R(\lambda_k)|^q} \; {}^m_q\|e_k\|^q)^{1/q} \leq$$

$$\le C \max_{\lambda_k\in\ker Q} \frac{1}{|\lambda Q(\lambda_k)-R(\lambda_k)|}(\sum_{\lambda_k\in\ker Q}|f_k|^q\ (\lambda_k)^{\frac{m}{2}q})^{1/q} \le \text{const}\ {}^{m}_{q}\|f\|$$

Следовательно, оператор (2.3.8) ограничен. Далее, пусть $\varphi \in \mathfrak{U}^0$. Тогда

$$\sum_{\lambda_k\in\ker Q}\frac{<(\lambda L_0-M_0)\varphi, e_k>}{\lambda Q(\lambda_k)-R(\lambda_k)}e_k =$$

$$\sum_{\lambda_k\in\ker Q}\frac{<\sum\limits_{\lambda_j\in\ker Q}(\lambda Q(\lambda_j)-R(\lambda_j))<\varphi, e_j>e_j, e_k>}{\lambda Q(\lambda_k)-R(\lambda_k)}e_k =$$

$$\sum_{\lambda_k\in\ker Q}\frac{(\lambda Q(\lambda_k)-R(\lambda_k))<\varphi, e_k>}{\lambda Q(\lambda_k)-R(\lambda_k)}e_k =$$

$$\sum_{\lambda_k\in\ker Q}<\varphi, e_k>e_k = \varphi.$$

Аналогично для $f \in \mathfrak{F}^0$ можно показать, что

$$(\lambda L_0 - M_0)\sum_{\lambda_k\in\ker Q}\frac{<f, e_k>}{\lambda Q(\lambda_k)-R(\lambda_k)}e_k = f$$

Следовательно, оператор (2.3.8) является обратным к $\lambda L_0 - M_0$. Контур Γ, удовлетворяющий (2.3.7), в силу аналитичности используемых ниже подынтегральных функций мы можем выбрать лежащим "правее" точки λ. Тогда при любых $\varphi\in\ker U^\bullet\cap\mathrm{dom}M,\quad f\in\ker F^\bullet,\quad t\in\mathbb{R}_+$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{(\mu L-M)^{-1}e^{(\mu-\lambda)t}}{\mu-\lambda}(\lambda L-M)\varphi d\mu =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{e^{(\mu-\lambda)t}\varphi}{\mu-\lambda}d\mu - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma(\mu L-M)^{-1}Le^{(\mu-\lambda)t}\varphi d\mu = \varphi - e^{-\lambda t}U^t\varphi = \varphi,$$

$$(\lambda L-M)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{(\mu L-M)^{-1}e^{(\mu-\lambda)t}}{\mu-\lambda}fd\mu =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{(\mu-\lambda)t}}{\mu-\lambda}fd\mu-\frac{e^{-\lambda t}}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}L(\mu L-M)^{-1}e^{\mu t}fd\mu=f-e^{-\lambda t}F^tf=f$$

в силу теоремы Коши.

Таким образом, $\forall\lambda\in\mathbb{C}$ существует оператор

$$(\lambda L_0-M_0)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0).\bullet$$

Следствие 2.3.1. *В условиях теоремы 2.3.1 существует оператор* $M_0^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$.

Доказательство. Достаточно взять в предыдущей лемме $\lambda=0$. При этом

$$(M_0)^{-1}=\sum_{\lambda_k\in\ker Q}\frac{<\cdot,e_k>}{R(\lambda_k)}e_k. \qquad (2.3.9)$$

$\bullet$

Теорема 2.3.2. *В условиях теоремы 2.3.1*
$\ker R_\mu^L(M)=\mathfrak{U}^0,\quad \ker L_\mu^L(M)=\mathfrak{F}^0$.

Доказательство. Возьмем $\varphi\in\ker R_\mu^L(M)\setminus\{0\}$, т.е. φ – собственный вектор оператора L. Понятно, что собственный вектор, согласно (2.3.5), принадлежит $\ker U^\bullet$. Итак, $\ker R_\mu^L(M)\subset\ker U^\bullet$. Докажем обратное включение. Рассмотрим вектор $\psi=R_\mu^L(M)\varphi$, где $\varphi\in\ker U^\bullet$. В силу лемм 2.3.2, 2.3.3 $\psi=R_\mu^{L_0}(M_0)\varphi\in\ker U^\bullet$, поэтому по лемме 2.3.4

$$0=\lim_{t\to 0+}U^t\psi=\psi=R_\mu^L(M)\varphi.$$

Таким образом, вектор $\varphi\in\mathfrak{U}^0$. Следовательно, $\ker R_\mu^L(M)=\mathfrak{U}^0$.

Теперь возьмем $f \in \ker L_\mu^L(M)$. Тогда $f = M\varphi$, где $\varphi \in \ker L_\mu^L(M) \cap \mathrm{dom} M$. Из замечания 2.3.4 получим $\forall t \in \mathbb{R}_+$

$$F^t f = F^t M\varphi = MU^t\varphi = M0 = 0$$

по доказанному. Таким образом, $f \in \ker F^\bullet$, $\quad \mathfrak{F}^0 \subset \ker F^\bullet$.

Теперь пусть $f \in \ker F^\bullet$, тогда $M_0^{-1} f = \varphi \in \ker U^\bullet = \ker L_\mu^L(M)$. Поэтому

$$L_\mu^L(M) f = L_\mu^L(M) M_0 \varphi = M R_\mu^L(M)\varphi = 0.\bullet$$

Замечание 2.3.6. В условиях теоремы 2.3.1 операторы $H = M_0^{-1} L_0$ и $J = L_0 M_0^{-1}$ равны $\mathbb{O}$.

Лемма 2.3.4. *В условиях теоремы 2.3.1* $\forall u \in \mathrm{im} R_\mu^L(M) \quad (\forall f \in \mathrm{im} L_\mu^L(M)) \quad \lim\limits_{t \to 0+} U^t u = u \quad (\lim\limits_{t \to 0+} F^t f = f)$.

Доказательство. Возьмем произвольный вектор $u = R_\mu^L(M)v$, $\mu \in S_\theta^L$. Тогда в силу L-резольвентного тождества (2.1.5)

$$U^t u = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R_\lambda^L(M) e^{\lambda t} d\lambda R_\mu^L(M) v =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{R_\lambda^L(M)v}{\mu - \lambda} e^{\lambda t} d\lambda + R_\mu^L(M)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{e^{\lambda t} v}{\lambda - \mu} d\lambda,$$

при этом второй интеграл справа равен нулю по теореме Коши. Устремляя $t \to 0+$, получим

$$\lim_{t \to 0+} U^t u = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{R_\lambda^L(M)v}{\mu - \lambda} d\lambda = R_\mu^L(M)v = u,$$

так как последний интеграл равен вычету функции $R_\lambda^L(M)v$ (контур обходим в отрицательном направлении).

(Утверждение о полугруппе $\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ доказывается аналогично.) •

Замыкание образа $\mathrm{im}R^L_\mu(M) \quad (\mathrm{im}L^L_\mu(M))$ правой (левой) L-резольвенты в норме пространства $\mathfrak{U} \quad (\mathfrak{F})$ обозначим через $\mathfrak{U}^1 \quad (\mathfrak{F}^1)$.

Теорема 2.3.3. *В условиях теоремы 2.3.1* $\mathrm{im}U^\bullet = \mathfrak{U}^1, \quad \mathrm{im}F^\bullet = \mathfrak{F}^1$.

Доказательство. Согласно лемме 2.3.4 $\mathrm{im}R^L_\mu(M) \subset \mathrm{im}U^\bullet$. А так как предел $\lim\limits_{t\to 0+} U^t u = u$ существует на плотном в $\mathfrak{U}^1$ линеале $\mathrm{im}R^L_\mu(M)$, в силу равномерной ограниченности полугруппы из теоремы Банаха – Штейнгауза вытекает существование этого предела во всем $\mathfrak{U}^1$, то есть $\mathfrak{U}^1 \subset \mathrm{im}U^\bullet$.

В соответствии с теоремой Коши и L-резольвентным тождеством

$$U^t u = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R^L_\lambda(M)e^{\lambda t}ud\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R^L_\lambda(M)e^{\lambda t}ud\lambda -$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R^L_{\mu_0}(M)e^{\lambda t}ud\lambda = \frac{1}{2\pi i}R^L_{\mu_0}(M)\int\limits_\Gamma (\mu_0-\lambda)R^L_\lambda(M)e^{\lambda t}ud\lambda$$

$\forall \mu_0 \in \rho^L(M)$. Таким образом, $\forall t > 0 \quad \mathrm{im}U^t \subset \mathrm{im}R^L_{(\mu,p)}(M)$. Значит, $\mathrm{im}U^\bullet \subset \mathfrak{U}^1$.

Утверждение об образе полугруппы $\mathrm{im}F^\bullet$ доказывается аналогично. •

Следовательно, образы полугрупп являются подпространствами, и мы можем определить операторы

$$L_1 = L\Big|_{\mathfrak{U}^1}, \quad M_1 = M\Big|_{\mathfrak{U}^1 \cap \mathrm{dom}M}.$$

Лемма 2.3.5. *В условиях теоремы 2.3.1* $L_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{F}^1)$.

Доказательство. Пусть $u = \lim\limits_{t \to 0+} U^t u$. Тогда в силу непрерывности оператора L и замечания 2.3.4

$$Lu = L \lim_{t \to 0+} U^t u = \lim_{t \to 0+} LU^t u = \lim_{t \to 0+} F^t Lu,$$

что и требовалось. •

Замечание 2.3.7. В силу леммы 2.3.1 и теорем 2.3.2, 2.3.3

$$\mathfrak{U}^0 \cap \mathfrak{U}^1 = \{0\}, \quad \mathfrak{F}^0 \cap \mathfrak{F}^1 = \{0\}.$$

Введем обозначения:

$$\tilde{\mathfrak{U}} = \overline{\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1}, \quad \tilde{\mathfrak{F}} = \overline{\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1},$$

$$\forall t > 0 \quad \tilde{U}^t = U^t \Big|_{\tilde{\mathfrak{U}}}, \quad \tilde{F}^t = F^t \Big|_{\tilde{\mathfrak{F}}}.$$

Лемма 2.3.6. *В условиях теоремы 2.3.1*

$$\tilde{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1, \quad \tilde{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1.$$

Доказательство. Покажем, что оператор $\tilde{P} = s - \lim\limits_{t \to 0+} \tilde{U}^t$ – проектор. Он непрерывен по теореме Банаха-Штейнгауза, так как полугруппа равномерно ограничена, а множество $\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, на котором заведомо определен $\tilde{P}$ в силу теорем 2.3.2, 2.3.3, плотно в пространстве $\tilde{\mathfrak{U}}$.

Далее, из непрерывности оператора $\tilde{P}$ получим

$$\forall u \in \tilde{\mathfrak{U}} \quad \tilde{P}^2 u = \tilde{P} \lim_{k \to \infty} \tilde{P}(u_k^0 + u_k^1) = \tilde{P} \lim_{k \to \infty} u_k^1$$

$$= \lim_{k \to \infty} \tilde{P} u_k^1 + \lim_{k \to \infty} \tilde{P} u_k^0 = Pu.$$

Здесь $u_k^l \in \mathfrak{U}^l, \quad l = 0, 1.$

Для $u \in \mathfrak{U}^0 \quad \tilde{P}u = 0$. Пусть $u \in \ker \tilde{P}$, т.е.

$$0 = \tilde{P}u = \lim_{k\to\infty} \tilde{P}(u_k^0 + u_k^1) = \lim_{k\to\infty} u_k^1.$$

Поэтому $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k^0 \in \mathfrak{U}^0$, так как $\mathfrak{U}^0$ замкнуто.

В силу теоремы 2.3.3 $\mathfrak{U}^1 \subset \mathrm{im}\tilde{P}$. Возьмем вектор $u \in \mathrm{im}\tilde{P}$. Тогда при некотором $v \in \tilde{\mathfrak{U}} \quad u = \tilde{P}v$. С учетом доказанной выше идемпотентности оператора $\tilde{P}$ получим

$$\tilde{P}u = \tilde{P}^2 v = \tilde{P}v = u.$$

Отсюда $\mathrm{im}P \subset \mathfrak{U}^1$.

Для пространства $\tilde{\mathfrak{F}}$ лемма доказывается аналогично с использованием проектора

$$\tilde{Q} = s - \lim_{t\to 0+} \tilde{F}^t. \bullet$$

Замечание 2.3.8. Из теорем 2.3.2, 2.3.3, замечания 2.3.5 и леммы 2.3.6 следует, что для полугруппы $\{\tilde{U}^t : t \in \mathbb{R}_+\} \quad (\{\tilde{F}^t : t \in \mathbb{R}_+\})$ можно определить единицу

$$\tilde{U}^0 = \tilde{P} = s - \lim_{t\to 0+} U^t \in \mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{U}}) \qquad (\tilde{F}^0 = \tilde{Q} = s - \lim_{t\to 0+} F^t \in \mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{F}}),$$

которая будет проектором на $\tilde{\mathfrak{U}}^1 \quad (\tilde{\mathfrak{F}}^1)$ вдоль $\tilde{\mathfrak{U}}^0 \quad (\tilde{\mathfrak{F}}^0)$.

2.4. Обобщенная задача Шоуолтера – Сидорова для эволюционного уравнения соболевского типа в квазисоболевых пространствах

Пусть, как и прежде, $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2n}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$, $Q_n(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \lambda^i$ и $R_s(\lambda) = \sum_{j=0}^{s} d_j \lambda^j$ – многочлены с действительными коэффициентами, не имеющие общих корней, степеней n и s, соответственно, причем $n < s$ и $d_s c_n < 0$, операторы $L = Q_n(\Lambda)$, $M = R_s(\Lambda)$, как в примере 1.5.1. Для пары уравнений

$$R_\alpha^L(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1} M u \tag{2.4.1}$$

и

$$L_\alpha^L(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1} f \tag{2.4.2}$$

при $\alpha \in S_\theta^L(M)$, эквивалентных линейному уравнению соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu, \tag{2.4.3}$$

поставим обобщенные задачи Шоуолтера – Сидорова

$$\lim_{t\to 0+} R_\alpha^L(M)(u(t) - u_0) = 0, \tag{2.4.4}$$

$$\lim_{t\to 0+} L_\alpha^L(M)(f(t) - f_0) = 0, \tag{2.4.5}$$

соответственно.

Замечание 2.4.1. Условие (2.4.4) эквивалентно

$$\lim_{t\to 0+} L(u(t) - u_0) = 0, \tag{2.4.6}$$

Теорема 2.4.1. *Для любого* $u_0 \in \mathfrak{U}$ $(f_0 \in \mathfrak{F})$ *существует единственное решение задачи* (2.4.1),(2.4.4) *(*(2.4.2),(2.4.5)*).*

Доказательство. Пусть $u_0 \in \mathfrak{U}$. Тогда по теореме 2.3.1 вектор-функция $u(t) = U^t u_0$ является решением уравнения (2.4.1). Проверим выполнение условия (2.4.4). Имеем

$$ {}_q^{m+2n}\|L(u(t) - u_0)\| =$$

$$= {}_q^{m+2n}\| \sum{}' Q(\lambda_k) e^{\mu_k t} < u_0, e_k > e_k - \sum Q(\lambda_k) < u_0, e_k > e_k \| =$$

$$= {}^{m+2n}_{q}\| \overset{\prime}{\sum} Q(\lambda_k)(e^{\mu_k t} - \mathbb{I}) < u_0, e_k > e_k\| \le$$

$$\le C(\overset{\prime}{\sum} |Q(\lambda_k)|^q |e^{\mu_k t} - \mathbb{I}|^q |u_{0k}|^q \, {}^{m+2n}_{q}\|e_k\|^q)^{1/q}.$$

Так как $e^{\mu_k t} - \mathbb{I} \sim \mu_k t$ при $t \to 0+$, то сходимость последнего ряда равносильна сходимости ряда

$$C(\overset{\prime}{\sum} |Q(\lambda_k)|^q |\mu_k t|^q |u_{0k}|^q \, {}^{m+2n}_{q}\|e_k\|^q)^{1/q} =$$

$$= Ct(\overset{\prime}{\sum} |R(\lambda_k) u_{0k}|^q \lambda_k^{\frac{m+2}{2}q})^{1/q} \le$$

$$\le Ct^{m+2n}_{q}\|Mu_0\|.$$

Устремляя $t \to 0+$, получим $\lim\limits_{t \to 0+} L(u(t) - u_0) = 0$.

Установим единственность решения. Пусть $v = v(t)$ – другое решение задачи. Зафиксируем $t \in \mathbb{R}_+$ и на $[0, t]$ построим вектор-функцию переменной s

$$w(s) = R^L_\alpha(M) U^{t-s} v(s).$$

По построению $w \in C[0, t] \cap C^1(0, t)$, кроме того

$$\lim_{s \to 0+} w(s) = \lim_{s \to 0+} R^L_\alpha(M) U^{t-s} v(s) = R^L_\alpha(M) U^t u_0.$$

и

$$\dot{w}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} R^L_\alpha(M)(\mu L - M)^{-1} \left(L\dot{v}(s) - Mv(s)\right) e^{\mu(t-s)} d\mu = 0.$$

То есть $w(s) = \mathrm{const}$. Следовательно, $R^L_\alpha(M)(U^t u_0 - v(t)) = 0$. Значит, $U^t u_0 - v(t) \in \ker R^L_\alpha(M)$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$. Далее, так как

$$0 = R^L_\alpha(M) \frac{d}{dt}(U^t u_0 - v(t)) = (\alpha L - M)^{-1} M (U^t u_0 - v(t)),$$

то $U^t u_0 = v(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$. •

2.5. Фазовое пространство эволюционного уравнения соболевского типа в квазисоболевых пространствах

Рассмотрим *задачу Коши*

$$v(0) = v_0 \tag{2.5.1}$$

для линейного уравнения

$$A\dot{v} = Bv, \tag{2.5.2}$$

Решением задачи (2.5.1),(2.5.2) назовем функцию $v \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathfrak{V}) \cap C(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathfrak{V})$, удовлетворяющую уравнению (2.5.2) и условию (2.5.1).

Определение 2.5.1. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{V}$ называется *фазовым пространством* уравнения (2.5.2), если

(i) любое решение $v(t)$ уравнения (2.5.2) лежит в $\mathfrak{P}$, т.е. $v(t) \in \mathfrak{P} \quad \forall t \geq 0$;

(ii) для любого $v_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (2.5.1),(2.5.2).

Пусть, как и прежде, $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2n}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$, $Q_n(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \lambda^i$ и $R_s(\lambda) = \sum_{j=0}^{s} d_j \lambda^j$ – многочлены с действительными коэффициентами, не имеющие общих корней, степеней n и s, соответственно, причем $n < s$ и $d_s c_n < 0$, операторы $L = Q_n(\Lambda)$, $M = R_s(\Lambda)$.

Теорема 2.5.1. *Множество* $\mathfrak{U}^1 = \overline{\mathrm{im} R_\mu^L(M)} = \mathrm{im} U^\bullet$ ($\mathfrak{F}^1 = \overline{\mathrm{im} L_\mu^L(M)} = \mathrm{im} F^\bullet$) *является фазовым пространством уравнения* (2.4.1) *(*(2.4.2)*).*

Доказательство. Покажем, что если $u(t)$ – решение уравнения (2.4.1), то $u(t) \in \mathfrak{U}^1 \quad \forall t \geq 0$. Так как $u(t)$ – решение уравнения

(2.4.1), то

$$R^L_\alpha(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1}Mu = \alpha R^L_\alpha(M)u - u$$

в силу тождества (2.1.3). Тогда

$$u = R^L_\alpha(M)(\alpha u - \dot{u}).$$

То есть $u(t) \in \mathrm{im} R^L_\alpha(M)$, и, следовательно, $u(t) \in \mathfrak{U}^1 \quad \forall t \geq 0$.

Пусть $u_0 \in \mathfrak{U}^1$. В силу теорем 2.3.3, 2.4.1 вектор-функция $u(t) = U^t u_0$ является единственным решением задачи $u(0) = u_0$ для уравнения (2.4.1).

(Утверждение теоремы относительно уравнения (2.4.2) доказывается аналогично.) •

Замечание 2.5.1. Фазовое пространство $\mathfrak{U}^1$ уравнения (2.4.1) совпадает с фазовым пространством уравнения (2.4.3).

Определение 2.5.2. Операторы

$$P = s - \lim_{t \to 0+} U^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}), \quad Q = s - \lim_{t \to 0+} F^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}),$$

называются единицами полугрупп $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}, \quad \{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, соответственно.

Замечание 2.5.2. Единица полугруппы является проектором.

Действительно, для любого $u \in \mathfrak{U}$

$$P^2 u = \lim_{\tau \to 0+} U^\tau \lim_{t \to 0+} U^t u = \lim_{\tau \to 0+} \lim_{t \to 0+} U^\tau U^t u =$$

$$\lim_{\tau \to 0+} \lim_{t \to 0+} U^{\tau + t} u = \lim_{\tau \to 0+} U^\tau u = Pu.$$

Здесь мы использовали полугрупповое свойство и сильную непрерывность полугруппы $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$.

Определение 2.5.3. Оператор M называется *сильно L-секториальным справа* (*слева*), если он L-секториален и при $\lambda, \mu \in S^L_\theta(M)$

$$ {}_{\mathfrak{U}}\|R^L_\mu(M)(\lambda L - M)^{-1}Mu\| \leq \frac{\mathrm{const}(u)}{|\lambda||\mu|} $$

при любом $u \in \mathrm{dom}M$

(существует плотный в $\mathfrak{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$ такой, что

$$ {}_{\mathfrak{F}}\|M(\lambda L - M)^{-1}L^L_\mu(M)f\| \leq \frac{\mathrm{const}(f)}{|\lambda| \prod\limits_{k=0}^{p} |\mu_k|} $$

при любом $f \in \overset{\circ}{\mathfrak{F}}$).

Теорема 2.5.2. *Пусть операторы M и L такие, как выше. Тогда существует единица полугруппы $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\} \quad (\{F^t : t \in \mathbb{R}_+\})$.*

Доказательство. Докажем, прежде всего, что оператор M сильно L-секториален справа (слева). Пусть $u \in \mathrm{dom}M$, $\lambda, \mu \in S^L_\theta(M)$.

$$ {}_{\mathfrak{U}}\|R^L_\mu(M)(\lambda L - M)^{-1}Mu\| = {}^{m+2n}_{q}\|\overset{\prime}{\sum} \frac{R(\lambda_k) < u, e_k >}{(\mu - \mu_k)(\lambda - \mu_k)Q(\lambda_k)} e_k\| \leq $$

$$ \leq C(\overset{\prime}{\sum} \frac{|\mu_k|^q |u_k|^q}{|\mu - \mu_k|^q |\lambda - \mu_k|^q} {}^{m+2n}_{q}\|e_k\|)^{1/q} \leq $$

$$ \leq \frac{\mathrm{const}(u)}{|\mu||\lambda|}, $$

где

$$ \mathrm{const}(u) = \frac{C}{\sin^2\theta}(\overset{\prime}{\sum} |\mu_k|^q |u_k|^q (\lambda_k)^{\frac{m+2n}{2}q})^{1/q} \sim \frac{C}{\sin^2\theta}\frac{|d_s|}{|c_n|} {}^{m+2s}_{q}\|u\| < \infty, $$

так как

$$|\mu_k| \sim \frac{|d_s|}{|c_n|}|\lambda|^{s-n} \text{ при } k \to \infty.$$

Пусть $u \in \mathrm{dom}M, \quad s > t > 0$. Тогда

$$U^s u - U^t u = U^t \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \left(R^L_\lambda(M) - \frac{I}{\lambda} \right) u e^{\lambda(s-t)} d\lambda =$$

$$= U^t \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (\lambda L - M)^{-1} e^{\lambda(s-t)} M u \frac{d\lambda}{\lambda} =$$

$$= (2\pi i)^{-2} \int\limits_{\Gamma_0} \int\limits_{\Gamma} R^L_\mu(M)(\lambda L - M)^{-1} M u e^{\mu t + \lambda(s-t)} \frac{d\lambda}{\lambda} d\mu,$$

где контур Γ_0 удовлетворяет (2.3.7); находится "правее" Γ. Сделаем замены $\mu t = \nu, \quad \lambda(s-t) = \nu_1$. Очевидно, новые контуры интегрирования можно выбрать независящими от s и t. Обозначим эти контуры теми же символами Γ_0, Γ. В следствие сильной L-секториальности оператора M

$$_{\mathfrak{U}}\left\|(\nu_1 L - tM)^{-1} L(\nu L - (s-t)M)^{-1} M u\right\| \leq \frac{\mathrm{const}(u)}{|\nu||\nu_1|}.$$

Поэтому $_{\mathfrak{U}}\|(U^s - U^t)u\| \leq (s-t)\mathrm{const}(u)$ для любого $u \in \mathrm{dom}M$. Так как пространство $\mathfrak{U}$ квазибанахово, множество $\mathrm{dom}M$ плотно в $\mathfrak{U}$, а полугруппа $\{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ равномерно ограничена, получаем

$$P = s - \lim_{t \to 0+} U^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}).$$

(Существование предела

$$Q = s - \lim_{t \to 0+} F^t \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$$

доказывается аналогично.) •

Следствие 2.5.1. *В условиях теоремы 2.5.2* $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 \quad (\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1)$.

Доказательство. Докажем, что $\ker P = \ker U^\bullet, \quad \mathrm{im} P = \mathrm{im} U^\bullet$. Пусть $u \in \ker U^\bullet$. Тогда в силу замечания 2.3.5 $U^t u = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$. Поэтому $Pu = \lim\limits_{t \to 0+} U^t u = 0$, т.е. $\ker U^\bullet \subset \ker P$. Если $Pu = 0$, то $U^t u = \lim\limits_{s \to 0+} U^{t+s} u = U^t P u = 0$ вследствие сильной непрерывности полугруппы и того, что $U^t \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$. Поэтому $\ker P = \ker U^\bullet$.

Образ полугруппы $\mathrm{im} U^\bullet \subset \mathrm{im} P$ по определению 2.3.3. Пусть $u = Pv$, тогда $Pu = P^2 v = Pv = u$ в силу замечания 2.5.2, т.е. $\mathrm{im} P \subset \mathrm{im} U^\bullet$ согласно определению образа полугруппы.

(Равенство $\ker Q = \ker F^\bullet, \quad \mathrm{im} Q = \mathrm{im} F^\bullet$ доказывается аналогично.) •

В соответствии с замечанием 2.5.2 оператор $P \quad (Q)$ – проектор, т.е. $\mathfrak{U} = \ker P \oplus \mathrm{im} P = \ker U^\bullet \oplus \mathrm{im} U^\bullet = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 \quad (\mathfrak{F} = \ker Q \oplus \mathrm{im} Q = \ker F^\bullet \oplus \mathrm{im} F^\bullet = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1)$ в силу теорем 2.3.2, 2.3.3.

Замечание 2.5.3. В силу леммы 2.3.6

$$\tilde{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U}, \quad \tilde{P} = P \quad (\tilde{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}, \quad \tilde{Q} = Q).$$

Замечание 2.5.4. Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$, то фазовым пространством уравнений (2.4.1), (2.4.3) (уравнения (2.4.2)) является $\mathfrak{U} \quad (\mathfrak{F})$, так как тогда $\mathfrak{U}^0 = \{0\} \quad (\mathfrak{F}^0 = \{0\})$.

Следствие 2.5.2. *В условиях теоремы 2.5.2*

(i) $\forall u \in \mathfrak{U} \quad LPu = QLu$ *;*

(ii) $\forall u \in \mathrm{dom} M \quad Pu \in \mathrm{dom} M, \quad MPu = QMu.$

Доказательство. Возьмем произвольный вектор $u \in \mathrm{dom} M$. С учетом замкнутости оператора M, замечания 2.3.4 и того,что существуют пределы

$$\lim_{t\to 0+} U^t u = Pu \quad \text{и} \quad \lim_{t\to 0+} MU^t u = \lim_{t\to 0+} F^t M u = QMu,$$

следует второе утверждение леммы.

Утверждение (i) доказывается аналогично, но более просто в силу непрерывности оператора L.●

Напомним, что $L_k = L\Big|_{\mathfrak{U}^k}, \quad M_k = M\Big|_{\mathrm{dom}M_k}, \quad \mathrm{dom}M_k = \mathrm{dom}M \cap \mathfrak{U}^k, k = 0, 1$.

Следствие 2.5.3. *В условиях теоремы 2.5.2 операторы*

$M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^0; \mathcal{F}^0)$ *биективен;*

$M_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^1; \mathcal{F}^1)$.

Доказательство. О том, что $\mathrm{im}M_0 \subset \mathfrak{F}^0$ говорилось в лемме 2.3.2. В силу следствия 2.3.1, оператор $M_0 : \mathrm{dom}M_0 \to \mathfrak{F}^0$ инъективен и сюръективен.

Возьмем $u \in \mathrm{dom}M_1$.

$$M_1 u = M_1 P u = Q M_1 u$$

согласно следствию 2.5.2. Поэтому $M_1 u \in \mathfrak{F}^1$.

Для того, чтобы доказать плотную определенность оператора M_k в пространстве $\mathfrak{U}^k, \quad k = 0, 1$, достаточно лишь сильной L-секториальности справа оператора M. Действительно, в силу плотности линеала $\mathrm{dom}M$

$$\forall u \in \mathfrak{U}^1 \quad \exists \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathrm{dom}M : \quad u_k \to u \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Поэтому существует последовательность

$$\{v_k\}_{k=1}^{\infty} = \{Pu_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathrm{dom}M_1 : \quad v_k \to Pu = u$$

в силу следствия 2.5.2 (ii) и того, что P – проектор на $\mathfrak{U}^1$.

Плотность линеала domM_0 в пространстве $\mathfrak{U}^0$ доказывается аналогично с использованием проектора $I - P$.●

2.6. Существование обратного оператора

Пусть, как и прежде, $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2n}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$, $Q_n(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \lambda^i$ и $R_s(\lambda) = \sum_{j=0}^{s} d_j \lambda^j$ – многочлены с действительными коэффициентами, не имеющие общих корней, степеней n и s, соответственно, причем $n < s$ и $d_s c_n < 0$, операторы $L = Q_n(\Lambda)$, $M = R_s(\Lambda)$.

Тогда оператор M сильно L-секториален. Тогда в силу леммы 2.3.5 оператор $L_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$. В этом параграфе мы докажем существование оператора $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$.

Интегралом типа Данфорда-Тейлора определим семейство операторов $\{R^t : t \in \mathbb{R}_+\}$

$$R^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu, \qquad (2.6.1)$$

где контур Γ удовлетворяет (2.3.7).

Лемма 2.6.1. *Семейство операторов $\{R^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, определяемое соотношением (2.6.1), аналитично в секторе $\{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta - \pi/2\}$.*

Доказательство. В силу (2.3.7)

$$\exists N > 0 \quad \forall \mu \in \Gamma : |\mu| > N \quad \forall \tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta - \frac{\pi}{2}$$

$$\left(|\arg \mu + \arg \tau| \geq \Big| |\arg \mu| - |\arg \tau| \Big| > \theta - \theta + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\wedge \left(|\arg\mu + \arg\tau| \leq |\arg\mu| + |\arg\tau| < \theta + \theta - \frac{\pi}{2} = 2\theta - \frac{\pi}{2} \right.$$
$$\left. < 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \right).$$

Поэтому $\operatorname{Re}(\mu\tau) = |\mu\tau| \cos(\arg\mu + \arg\tau) < 0$.

Интеграл (2.6.1) можно дифференцировать по параметру τ. Лемма доказана. ●

Лемма 2.6.2. *В условиях леммы 2.6.1*

(i) $\forall t > 0 \quad R^t L = U^t, \quad LR^t = F^t$;

(ii) $\forall s, t > 0 \quad R^{s+t} = U^s R^t = R^t F^s$.

Доказательство. Утверждение (i) очевидно, (ii) доказывается с помощью аналога тождества Гильберта.●

Лемма 2.6.3. *В условиях леммы 2.6.1*

$$\forall t > 0 \quad R^t = PR^t \quad (R^t = R^t Q).$$

Доказательство. Для доказательства устремим в утверждении леммы 2.6.2 (ii) s к нулю (непрерывность семейства (2.6.1) следует из леммы 2.6.1 и сильной L-секториальности оператора M справа (слева)) ●

Определение 2.6.1. Оператор M называется *сильно L-секториальным*, если он сильно L-секториален слева и

$$\forall \lambda, \mu \in S_\theta^L(M) \quad {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})}\|R_\mu^L(M)(\lambda L - M)^{-1}\| \leq \frac{\text{const}}{|\lambda||\mu|}.$$

Замечание 2.6.1. Сильно L-секториальный оператор M сильно L-секториален справа. Действительно,

$${}_{\mathfrak{U}}\|R_\mu^L(M)(\lambda L - M)^{-1} M u\| \leq {}_{\mathfrak{U}}\|R_\mu^L(M)(\lambda L - M)^{-1}\| \times {}_{\mathfrak{U}}\|Mu\|$$

$$\leq \frac{\text{const}\ {}_{\mathfrak{U}}\|Mu\|}{|\lambda||\mu|} = \frac{\text{const}(u)}{|\lambda||\mu|}.$$

Замечание 2.6.2. Пусть существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$ и оператор $T = ML^{-1}$ (или $S = L^{-1}M$) секториален. Тогда оператор M сильно L-секториален.

Докажем это. В качестве плотного в пространстве $\mathfrak{F}$ линеала $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$ возьмем $L[\text{dom}M]$ (плотность следует из того, что $\overline{\text{dom}M} = \mathfrak{U}$, и L – гомеоморфизм). Для λ, μ из сектора $S_\theta(T)$, $\quad f \in\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$

$${}_{\mathfrak{F}}\|M(\lambda L - M)^{-1}L^L_{\mu)}(M)f\| = {}_{\mathfrak{F}}\|L(\lambda L - M)^{-1}L^L_\mu(M)ML^{-1}f\| \leq$$

$$\leq {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|R_\lambda(T)\| \times {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|R_\mu(T)\| \times {}_{\mathfrak{F}}\|ML^{-1}f\| \leq$$
$$\leq \frac{\text{const}(f)}{|\lambda||\mu|}$$

в силу тождества 2.1.9 и секториальности оператора T. Далее,

$${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})}\|R^L_\mu(M)(\lambda L - M)^{-1}\| = {}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})}\|L^{-1}R_\mu(T) \times R_\lambda(T)\| \leq$$

$$\leq \frac{\text{const}}{|\lambda||\mu|}.\bullet$$

Лемма 2.6.4. *В условиях леммы 2.6.1 оператор M сильно L-секториален.*

Доказательство. Поступив, как при доказательстве теоремы 2.5.2, получим

$${}_{\mathfrak{U}}\|R^L_\mu(M)(\lambda L - M)^{-1}f\| = {}^{m+2n}_{q}\|\sum{}' \frac{< f, e_k >}{(\mu - \mu_k)(\lambda - \mu_k)Q(\lambda_k)}e_k\| \leq$$

$$\leq C(\sum{}' \frac{|f_k|^q}{|\mu - \mu_k|^q|\lambda - \mu_k|^q|Q(\lambda_k)|^q}\ {}^{m+2n}_{q}\|e_k\|^q)^{1/q} \leq$$

$$\le \frac{\text{const}}{|\mu||\lambda|}\ {}^{m}_{q}\|f\|,$$

где

$$\text{const} = \frac{C}{\sin^2\theta}\frac{1}{|c_n|},$$

так как

$$|Q(\lambda_k)|^{-1} \sim \frac{1}{|c_n|}|\lambda_k|^{-n} \text{ при } k \to \infty.$$

то есть

$${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})}\|R^L_\mu(M)(\lambda L - M)^{-1}\| \le \frac{\text{const}}{|\lambda||\mu|}.$$

Лемма 2.6.5. *В условиях леммы 2.6.1 семейство операторов* $\{R^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, *определяемое формулой* (2.6.1), *равномерно ограничено.*

Доказательство. Используя лемму 2.6.2 и поступив, как при доказательстве теоремы 2.5.2, получим

$${}_{\mathfrak{U}}\|R^t f\| = {}^{m+2n}_{q}\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\mu L - M)^{-1}e^{\mu t} f d\mu\| =$$

$$= {}^{m+2n}_{q}\|\sideset{}{'}\sum \frac{< f, e_k > e^{\mu_k t}}{Q(\lambda_k)} e_k\| \le$$

$$\le C(\sideset{}{'}\sum \frac{|f_k|^q e^{\text{Re}\mu_k t q}}{|Q(\lambda_k)|^q}\ {}^{m+2n}_{q}\|e_k\|^q)^{1/q} \le$$

$$\le \text{const}\ {}^{m}_{q}\|f\|,$$

где

$$\text{const} = C\frac{1}{|c_n|},$$

так как

$$|Q(\lambda_k)|^{-1} \sim \frac{1}{|c_n|}|\lambda_k|^{-n} \text{ при } k \to \infty,$$

а $\text{Re}\mu_k t q < 0$, то есть

$${}_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})}\|R^t\| \le \text{const}.\bullet$$

Теорема 2.6.1. *В условиях леммы 2.6.1 существует оператор* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{F}, \quad s > t > 0$. Тогда

$$_{\mathfrak{F}}\|R^s f - R^t f\| = {_{\mathfrak{F}}}\|R^t(F^{s-t} - Q)f\| \leq C \ {_{\mathfrak{F}}}\|(F^{s-t} - Q)f\|$$

в силу лемм 2.6.2, 2.6.3 и 2.6.5. Отсюда следует существование оператора $\hat{R} = s - \lim\limits_{t \to 0+} R^t \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})$. Согласно лемме 2.6.2 и с учетом непрерывности оператора L, $\hat{R}L = P$ и $L\hat{R} = Q$. Сузив эти тождества на $\mathfrak{U}^1$ и $\mathfrak{F}^1$ соответственно, получим

$$\hat{R}_1 L_1 = I, \quad L_1 \hat{R}_1 = I,$$

где $\hat{R}_1 = \hat{R}\Big|_{\mathfrak{U}^1}$. Таким образом, $\hat{R}_1 = L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$. Более того, этот оператор

$$L_1^{-1} = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_k)^{-1} < ., e_k > e_k, & \text{если } \lambda_k \text{ не корень } Q_n(\lambda) \ \forall k \in \mathbb{N}; \\ \sum\limits_{k \in \mathbb{N}: k \neq \ell} (\lambda - \lambda_k)^{-1} < ., e_k > e_k, & \text{если } \exists \ell \in \mathbb{N} : \lambda_\ell - \text{ корень } Q_n(\lambda). \end{cases}$$

•

Замечание 2.6.3. Таким образом, мы получили, что пространства $(\mathfrak{U}^k, \mathfrak{F}^k), \ k = 0, 1$, являются парами инвариантных пространств.

Замечание 2.6.4. Множество $L_1[\mathrm{dom} M_1]$ плотно в $\mathfrak{F}^1$.

Действительно, так как $\overline{\mathrm{dom} M_1} = \mathfrak{U}^1$, то

$$\forall u \in \mathfrak{U}^1 \quad \exists \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathrm{dom} M_1 : \quad u_k \to u \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

В силу теоремы 2.6.1 оператор L_1 сюръективен, т.е.

$$\forall f \in \mathfrak{F}^1 \quad \exists u \in \mathfrak{U}^1 \quad f = L_1 u.$$

Последовательность $\{L_1 u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L_1[\mathrm{dom} M_1]$, поэтому

$$\forall f = L_1 u \in \mathfrak{U}^1 \quad \exists \{f_k = L_1 u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L_1[\mathrm{dom} M_1] : \quad \lim_{k \to \infty} f_k = f$$

в силу непрерывности оператора L_1. Что и требовалось.

Невырожденной будем называть полугруппу $\{V^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ с тождественным оператором в качестве единицы.

Сужение $\{U_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\} \quad (\{F_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\})$ полугруппы $\{U^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\} \quad (\{F^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\})$ на подпространство $\mathfrak{U}^1 \quad (\mathfrak{F}^1)$ является невырожденной аналитической полугруппой.

Инфинитезимальным генератором невырожденной полугруппы $\{V^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ называется оператор G с областью определения

$$\mathrm{dom} G = \{v \in \mathcal{V} : \exists \lim_{t \to 0+} t^{-1}(V^t v - v)\}$$

такой, что

$$Gv = \lim_{t \to 0+} t^{-1}(V^t v - v).$$

Обозначим: $S_1 = L_1^{-1} M_1, \quad T_1 = M_1 L_1^{-1}$.

Следствие 2.6.1. *В условиях теоремы 2.6.1 инфинитезимальным генератором полугруппы* $\{U_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\} \quad (\{F_1^t : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\})$ *является оператор* $S_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1) \quad (T_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{F}^1))$.

Доказательство. Доказывается это следствие так же, как аналогичный результат для аналитических групп: с использованием интегрального представления полугрупп (2.3.5), (2.3.6), теоремы 2.6.1 и тождеств

$$R_{\mu}^{L_1}(M_1) = R_{\mu}(S_1), \quad L_{\mu}^{L_1}(M_1) = R_{\mu}(T_1).$$

Областью определения оператора $T_1 \quad (S_1)$ является линеал $L_1[\mathrm{dom} M_1]$ $(\mathrm{dom} M_1)$, который плотен в пространстве $\mathfrak{F}^1$ в силу замечания 2.6.4.

●

Используя теорему Хилле-Иосиды-Феллера-Филлипса-Миядеры, сразу получим

Следствие 2.6.2. *В условиях теоремы 2.6.1 оператор* $S_1 \quad (T_1)$ *секториален.*

3. Эволюционные уравнения соболевского типа в квазисоболевых пространствах

3.1. Задача Коши для неоднородного уравнения

Пусть, как и прежде, $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2n}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$, $Q_n(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \lambda^i$ и $R_s(\lambda) = \sum_{j=0}^{s} d_j \lambda^j$ – многочлены с действительными коэффициентами, не имеющие общих корней, степеней n и s, соответственно, причем $n < s$ и $d_s c_n < 0$, операторы $L = Q_n(\Lambda)$, $M = R_s(\Lambda)$. Пусть $[0, T] \subset \mathbb{R}$– некоторый интервал. Возьмем вектор-функцию $f : [0, T] \to \mathfrak{F}$ и рассмотрим линейное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{3.1.1}$$

Определение 3.1.1. Вектор-функцию $u \in C^1([0, T]; \mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (3.1.1), назовем *решением* этого уравнения. Решение $u = u(t)$ уравнения (3.1.1) назовем *решением задачи Коши*

$$u(0) = u_0 \tag{3.1.2}$$

для уравнения (3.1.1) (коротко, решением задачи (3.1.1), (3.1.2)), если оно вдобавок удовлетворяет условию Коши (3.1.2) при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Теорема 3.1.1. *Пусть операторы L, M определены выше, вектор-функция $f : [0, T] \to \mathfrak{F}$ аналитична. Тогда для любого начального значения*

$$u_0 \in \mathcal{P}_f = \{u \in \mathrm{dom} M : (I - P)u = -M_0^{-1}(I - P)f(0)\}$$

существует единственное решение $u \in C^1((0, T], \mathfrak{U}) \cap C([0, T], \mathrm{dom} M)$

задачи (3.1.1),(3.1.2), *причем*

$$u(t) = U^t u_0 + \int\limits_0^t U^{t-s} L_1^{-1} Qf(s)ds - M_0^{-1}(I-Q)f(t).$$

Доказательство. Подействуем на уравнение (3.1.1) проектором Q из теоремы 2.5.2. Тогда $QL\dot{u} = QMu + Qf$, т.е. $LP\dot{u} = MPu + Qf$ в силу следствия 2.5.2. Подействовав на последнее уравнение оператором $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{F}^1)$ получим уравнение

$$\dot{u}^1 = S_1 u^1 + L_1^{-1} Qf \tag{3.1.3}$$

на пространстве $\mathfrak{U}^1$. Здесь оператор $S_1 = L_1^{-1} M_1$ секториален в силу следствия 2.6.2, $\mathrm{dom} S_1 = \mathrm{dom} M_1$ по определению S_1. Поэтому, согласно теореме 5.8 [40, гл.5,§3], для любого $u_0^1 \in \mathrm{dom} M_1$ существует единственное решение

$$u^1(t) = U_1^t u_0^1 + \int\limits_0^t U_1^{t-s} L_1^{-1} Qf(s)ds = U^t u_0^1 + \int\limits_0^t U^{t-s} L_1^{-1} Qf(s)ds$$

задачи (3.1.2), (3.1.3), где $\{U^t : t \geq 0\}$ – полугруппа, построенная в теореме 2.3.1, а нижний индекс "1"обозначает ее сужение на подпространство $\mathfrak{U}^1$.

Подействовав на уравнение (3.1.1) проектором $I - Q$, а затем оператором $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, получим уравнение на пространстве $\mathfrak{U}^0$

$$H\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1}(I-Q)f, \tag{3.1.4}$$

которое, в силу замечания 2.3.6, равносильно

$$u^0(t) = -M_0^{-1}(I-Q)f(t),$$

которое дает нам решение уравнения (3.1.4). Для того, чтобы оно удовлетворяло условию $u^0(0) = u_0^0$, необходимо, чтобы $u_0^0 \in \mathfrak{U}^0 \cap \mathcal{P}_f$.

Понятно, что решением задачи (3.1.1), (3.1.2) является сумма полученных нами решений, если $u_0 = u_0^0 + u_0^1$. Из того, что $U^t u_0^1 = U^t u_0$, получаем требуемое.

Если вспомнить обозначение $T_1 = M_1 L_1^{-1}$, то можно записать

$$Mu(t) = F^t M u_0 + \int\limits_0^t F^{t-s} T_1 Q f(s) ds + f^0(t),$$

откуда следует непрерывность $Mu(t)$. •

3.2. Относительно спектральная теорема

Пусть, как и прежде, $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2n}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$, $Q_n(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \lambda^i$ и $R_s(\lambda) = \sum_{j=0}^{s} d_j \lambda^j$ – многочлены с действительными коэффициентами, не имеющие общих корней, степеней n и s, соответственно, причем $n < s$ и $d_s c_n < 0$, операторы $L = Q_n(\Lambda)$, $M = R_s(\Lambda)$. Ранее в лемме 2.6.4 мы доказали, что оператор M сильно L-секториален.

Рассмотрим следующее условие:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma^L(M) = \sigma_1^L(M) \cup \sigma_2^L(M) \text{ и } \sigma_1^L(M) \text{ не пусто,} \\ \text{существует ограниченная область } \Omega_1 \subset \mathbb{C} \\ \text{ с границей класса } C^1, \\ \text{ такая, что } \Omega_1 \supset \sigma_1^L(M) \quad \text{и} \quad \overline{\Omega}_1 \bigcap \sigma_2^L(M) \text{ пусто.} \end{array} \right\} \qquad (3.2.1)$$

Если это условие выполнено, то существуют [21] операторы, заданные интегралами по замкнутому контуру от аналитических оператор-функций

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} R_\mu^L(M) d\mu \text{ и } Q_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} L_\mu^L(M) d\mu,$$

где $\gamma_1 = \partial\Omega_1$. По построению операторы $P_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$.

Лемма 3.2.1. *Пусть операторы M и L определены, как выше, и выполнено условие* (3.2.1), *тогда операторы $P_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ – проекторы в соответствующих пространствах.*

Доказательство. В силу аналитичности подынтегральной оператор-функции

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\acute{\gamma}_1} R^L_\lambda(M)d\lambda, \qquad Q_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\acute{\gamma}_1} L^L_\lambda(M)d\lambda.$$

Здесь $\acute{\gamma}_1$ – контур, ограничивающий область, содержащую контур γ_1 и не содержащую точки $\sigma^L_2(M)$. То есть он немного "шире" контура $\acute{\gamma}_1$. Отсюда,

$$P_1^2 = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\acute{\gamma}_1}\int\limits_{\gamma_1} R^L_\lambda(M)R^L_\mu(M)d\mu d\lambda =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\left(\int\limits_{\acute{\gamma}_1}\frac{d\lambda}{\lambda-\mu}\int\limits_{\gamma_1} R^L_\mu(M)d\mu + \int\limits_{\acute{\gamma}_1} R^L_\lambda(M)d\lambda\int\limits_{\gamma_1}\frac{d\mu}{\mu-\lambda}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} R^L_\mu(M)d\mu = P_1,$$

в силу теоремы Фубини, теоремы о вычетах и тождества (2.1.5). Утверждение относительно оператора Q доказывается аналогично с заменой правого L-резольвентного тождества (2.1.5) на левое (2.1.6).

•

Положим $\mathfrak{U}^{11} = \operatorname{im} P_1$, $\mathfrak{F}^{11} = \operatorname{im} Q_1$, $\mathfrak{U}^{10} = \ker P_1$, $\mathfrak{F}^{10} = \ker Q_1$; и через L_{11} (M_{11}) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^{11}$.

Теорема 3.2.1. *В условиях леммы 3.2.1* *(i) операторы* $L_{11}, M_{11} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{11}; \mathfrak{F}^{11})$*;*

(ii) существует оператор $L_{11}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^{11}; \mathfrak{U}^{11})$*.*

Доказательство. Утверждение (i) следует из построения операторов $P_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, так как $LP_1 = Q_1 L = L_{11}$ и $MP_1 = Q_1 M = M_{11}$.

Утверждение (ii) следует из теоремы 2.6.1, так как оператор L_{11}^{-1} равен сужению оператора

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} (\mu L - M)^{-1} d\mu.$$

на подпространство $\mathfrak{F}^{11}$.●

Следствие 3.2.1. *В условиях леммы 3.2.1,* $P_1 = PP_1 = P_1 P$ *и* $Q_1 = QQ_1 = Q_1 Q$*.*

Доказательство. Пусть Γ, удовлетворяет (2.3.7). В силу аналитичности используемых ниже подынтегральных функций мы можем выбрать лежащим "правее" контура γ_1.

$$P_1 P = PP_1 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\gamma_1} R_\mu^L(M) R_\lambda^L(M) d\mu d\lambda =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \left(\int\limits_{\Gamma} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu} \int\limits_{\gamma_1} R_\mu^L(M) d\mu + \int\limits_{\Gamma} R_\lambda^L(M) d\lambda \int\limits_{\gamma_1} \frac{d\mu}{\mu - \lambda} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} R_\mu^L(M) d\mu = P_1,$$

в силу теоремы Фубини, тождества (2.1.5) и теоремы Коши. ●

Построим операторы $P_2 = P - P_1$ и $Q_2 = Q - Q_1$. В силу следствия 3.2.1, они являются проекторами. Действительно,

$$(P_2)^2 = (P - P_1)^2 = P^2 - P_1 P - PP_1 + P_1^2 = P - 2P_1 + P_1 = P - P_1 = P_2.$$

Поэтому $P_2 = P - P_1 = P(I - P_1) = (I - P_1)P = P_2P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ – проектор на некоторое подпространство. Положим $\mathfrak{U}^{12} = \operatorname{im} P_2$, $\mathfrak{F}^{12} = \operatorname{im} Q_2$ и через L_{12} (M_{12}) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^{12}$.

Следствие 3.2.2. *В условиях леммы 3.2.1*

(i) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1, \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1, \quad \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}^{11} \oplus \mathfrak{U}^{12}, \quad \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}^{11} \oplus \mathfrak{F}^{12}$;

(ii) операторы $L_{12}, M_{12} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{12}; \mathfrak{F}^{12})$;

(iii) существует оператор $L_{12}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^{12}; \mathfrak{U}^{12})$.

3.3. Инвариантные пространства

Пусть, как и прежде, $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2n}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$, $Q_n(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \lambda^i$ и $R_s(\lambda) = \sum_{j=0}^{s} d_j \lambda^j$ – многочлены с действительными коэффициентами, не имеющие общих корней, степеней n и s, соответственно, причем $n < s$ и $d_s c_n < 0$, операторы $L = Q_n(\Lambda)$, $M = R_s(\Lambda)$. Операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Рассмотрим при $\alpha \in \rho^L(M)$ пару эквивалентных уравнений соболевского типа

$$L\dot{u}(t) = Mu(t), \tag{3.3.1}$$

$$L(\alpha L - M)^{-1}\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1}f \tag{3.3.2}$$

Определение 3.3.1. Пусть $\mathfrak{P}$ – фазовое пространство уравнения (3.3.1). Подмножество $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{P}$ называется *инвариантным пространством* уравнения (3.3.1), если при любом $u_0 \in \mathfrak{J}$ решение $u = u(t)$ (3.3.1) с условием

$$u(0) = u_0, \tag{3.3.3}$$

лежит поточечно в $\mathfrak{J}$ (т.е. $u(t) \in \mathfrak{J}$ для всех $t \in R_+$).

Теорема 3.3.1. *Пусть операторы M и L определены как выше и выполнено условие* (3.2.1), *тогда образ группы*

$$V^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu, t \in R, \tag{3.3.4}$$

является инвариантным пространством уравнения (3.3.1).

Доказательство. Утверждение следует из равенства $\operatorname{im} V^\bullet = \operatorname{im} P_1 = \mathfrak{U}^{11}$, которое следует из теоремы 2.5.1, следствий 3.2.1 и 3.2.2.$\bullet$

Следствие 3.3.1. *В условиях теоремы 3.3.1 существует не менее двух инвариантных подпространств уравнения (3.3.1 (уравнения (3.3.2)).*

Доказательство. Очевидно, верны следующие соотношения $U^t = U^t P = U^t P_1 + U^t P_2$. Коммутирование операторов P_1 и U^t следует из тождества (2.1.5), вида полугруппы (2.3.5) и непрерывности оператора P_1. Тогда для $u_0 \in \mathfrak{U}^{11}$ имеем $U^t u_0 = U^t P_1 u_0 = P_1 U^t u_0 \in \mathfrak{U}^{11}$. Из теоремы 2.5.1 и следствия 3.2.2 следует, что $\mathfrak{U}^{11}$ – инвариантное подпространство уравнения (3.3.1).

Аналогично с заменой проектора P_1 на P_2 показывается инвариантность подпространства $\mathfrak{U}^{12}$.

Таким же образом доказывается утверждение теоремы об уравнении (3.3.2), инвариантными подпространствами которого являются $\mathfrak{F}^{11} = \operatorname{im} Q_1$, $\mathfrak{F}^{12} = \operatorname{im} Q_2$. $\bullet$

3.4. Экспоненциальные дихотомии решений

Пусть, как и прежде, $\mathfrak{U} = \ell_q^{m+2n}$, $\mathfrak{F} = \ell_q^m$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}_+$, $Q_n(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \lambda^i$ и $R_s(\lambda) = \sum_{j=0}^{s} d_j \lambda^j$ – многочлены с действительными коэффициентами, не имеющие общих корней, степеней n и s, соответственно, причем $n < s$ и $d_s c_n < 0$, операторы $L = Q_n(\Lambda)$, $M = R_s(\Lambda)$. Операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Рассмотрим при $\alpha \in \rho^L(M)$ пару эквивалентных уравнений соболевского типа

$$L\dot{u}(t) = Mu(t), \tag{3.4.1}$$

$$L(\alpha L - M)^{-1}\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1} f \tag{3.4.2}$$

Определение 3.4.1. Говорят, что решения уравнения (3.4.1) обладают экспоненциальной дихотомией, если

(i) фазовое пространство уравнения (3.4.1) представимо в виде $\mathfrak{P} = \mathfrak{I}^1 \oplus \mathfrak{I}^2$, где $\mathfrak{I}^{1(2)}$ – инвариантные пространства уравнения (3.4.1);

(ii) при любых $u_0 \in \mathfrak{I}^1$ $(u_0 \in \mathfrak{I}^2)$ решение $u = u(t)$ задачи (3.4.1), (3.3.3) таково, что ${}_{\mathfrak{U}}\|u(t)\| \le C_1 e^{-a_1 t}{}_{\mathfrak{U}}\|u_0\|$ $({}_{\mathfrak{U}}\|u(t)\| \ge C_2 e^{a_2 t}{}_{\mathfrak{U}}\|u_0\|)$ при некоторых $a_1, a_2 > 0$ и всех $t \in R_+$.

Замечание 3.4.1. Иначе говоря, наличие экспоненциальных дихотомий решений означает, что решения, лежащие в одном инвариантном подпространстве, экспоненциально возрастают, а в другом – экспоненциально убывают.

Теорема 3.4.1. *Пусть операторы M, L определены выше, существует $\omega > 0$ такое, что $\sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : -\omega \le \mathrm{Re}\mu \le \omega\} = \emptyset$ и множество $\sigma_+ = \sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\mu > 0\} \ne \emptyset$. Тогда уравнение* (3.4.1) (*уравнение* (3.4.2)) *обладает экспоненциальной дихотомией.*

Доказательство. Из условий теоремы следует выполнение условия (3.2.1). Переобозначим $\mathfrak{U}^{11} = \mathfrak{U}^+$, $\mathfrak{U}^{12} = \mathfrak{U}^-$. Пусть $L_\pm = L\Big|_{\mathfrak{U}^\pm}$, $M_\pm = M\Big|_{\mathrm{dom}M_\pm}$, $\mathrm{dom}M_\pm = \mathrm{dom}M \cap \mathfrak{U}^\pm$. Согласно теореме 3.2.1 и следствию 3.2.2 $L_\pm \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^\pm; \mathfrak{F}^\pm)$, $M_\pm \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^\pm; \mathfrak{F}^\pm)$, $\sigma^{L_\pm}(M_\pm) = \sigma_\pm$, где $\sigma_- = \sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\mu < 0\}$. Отсюда следует, что оператор M_+ (L_+, σ)-ограничен [47], а оператор M_- L-секториален с константой $a \leq -\omega$.

Введем обозначения $U^t_\pm = U^t\Big|_{\mathfrak{U}^\pm}$. При доказательстве теоремы 3.3.1 в частности показано, что $U^t_\pm \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^\pm)$. Пусть $t > 0$, тогда $u^-(t) = U_-(t)u^-$ и

$$ {}_q^{m+2n}\|u^-(t)\| \leq C_2 e^{-a_1(t)} {}_q^{m+2n}\|u^-\|. $$

В силу теоремы 2.3.1 здесь можно взять $a_1 = \omega$, $C_2 = C$.

Далее, из (L_+, σ)-ограниченности оператора M_+ и результатов [47] следует, что полугруппа $\{U^t_+ : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ аналитически продолжима до группы во всю плоскость, а ее операторы представимы в виде

$$ U^t_+ = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\tilde{\gamma}} R^{L_+}_\mu (M_+) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}, $$

где замкнутый контур $\tilde{\gamma}$ ограничивает σ_+, как в условии (3.2.1).

Для $u \in \mathfrak{U}^1$ имеем $u = u^+ + u^-$, $u^\pm \in \mathfrak{U}^\pm$. Отсюда если $t > 0$, $u^+ \in \sigma^L_+(M)$ то

$$ u^+(t) = U^t_+ u^+ = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\tilde{\gamma}} R^{L_+}_\mu (M_+) e^{\mu t} u^+ d\mu = $$

$$ \sum_{k : \mu_k \in \sigma_+} e^{\mu_k t} < u, e_k > e_k. $$

Тогда

$$ {}_{q}^{m+2n}\|u^{+}(t)\| = {}_{q}^{m+2n}\|U_{+}^{t}u+\| = (\sum_{k:\mu_k\in\sigma_+} e^{\mathrm{Re}\mu_k qt}| < u^{+}, e_k > |^{q}\cdot(\lambda_k)^{\frac{m+2n}{2}q})^{1/q} = $$

$$ = (\sum_{k:\mu_k\in\sigma_+} e^{\mathrm{Re}\mu_k qt}| < u^{+}, e_k > |^{q}\cdot {}_{q}^{m+2n}\|e_k\|^{q})^{1/q} \geq $$

$$ \geq e^{a_2 t}(\sum_{k:\mu_k\in\sigma_+} |u_k^{+}|^{q}(\lambda_k)^{\frac{m+2n}{2}q})^{1/q} = $$

$$ e^{a_2 t}\ {}_{q}^{m+2n}\|u^{+}\|, $$

где $a_2 = \omega < \min\{\mathrm{Re}\mu_k : \mu_k \in \sigma_+\} > 0$. Отсюда вытекает вторая из оценок определения 3.4.1. •

3.5. Уравнение Дзекцера в квазисоболевых пространствах

Теперь рассмотрим уравнение Дзекцера

$$ (\lambda-\Lambda)u_t = (\alpha\Lambda^2+\beta\Lambda)u+f, \quad \lambda,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha\in\mathbb{R}_+, \tag{3.5.1} $$

в квазисоболевых пространствах $\mathfrak{U}=\ell_q^{m+2}$ и $\mathfrak{F}=\ell_q^{m}$, $m\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{R}_+$. Прообразом уравнения (3.5.1) послужила краевая задача для уравнения Дзекцера в банаховых пространствах

$$ (\lambda-\Delta)v_t = \alpha\Delta v - \beta\Delta v^2, \quad \lambda,\in\mathbb{R},\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}_+, \tag{3.5.2} $$

моделирующая эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости [14].

Зададим область определения $\mathrm{dom}(\alpha\Lambda^2+\beta\Lambda) = \ell_q^{m+4}$. Тогда операторы $L = (\lambda-\Lambda)\in\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M = (\alpha\Lambda^2+\beta\Lambda)\in\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

В силу теоремы 3.1.1 имеет место

Следствие 3.5.1. *При любых* $m, \lambda, \beta \in \mathbb{R}$, $\tau, q, \alpha \in \mathbb{R}_+$, $u_0 \in \mathfrak{U}$, $f^0 \in C^1((0,\tau);\mathfrak{F}^0)$ *и* $f^1 \in C((0,\tau);\mathfrak{F}^1)$ *существует единственное решение* $u \in C^1((0,\tau);\mathfrak{U})$ *задачи*

$$u(0) = u_0, \tag{3.5.3}$$

для уравнения (3.5.1), *которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = -M_0^{-1}f^0(t) + U^t u_0 + \int_0^t U^{t-s}L_1^{-1}f^1(s)ds.$$

Здесь

$$\mathfrak{F}^0 = \begin{cases} \{0\}\,, \text{ если } \lambda_k \neq \lambda \text{ при всех } k \in \mathbb{N}; \\ \{f \in \mathfrak{F}{:}f_k = 0,\ k \in \mathbb{N}\backslash\{\ell{:}\lambda_\ell = \lambda\}\}\,; \end{cases}$$

$$\mathfrak{F}^1 = \begin{cases} \mathfrak{F}, \text{ если } \lambda_k \neq \lambda \text{ при всех } k \in \mathbb{N}; \\ \{f \in \mathfrak{F}{:}f_k = 0, \lambda_k = \lambda\}; \end{cases}$$

$$M_0^{-1} = \begin{cases} \mathbb{O}, \text{ если } \lambda_k \neq \lambda \text{ при всех } k \in \mathbb{N}; \\ \sum_{k \in \mathbb{N}:\lambda_k = \lambda} (\alpha\lambda_k^2 + \beta\lambda_k)^{-1} e_k. \end{cases}$$

$$U^t = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t} {<}.,e_k{>} e_k, & \text{если } \lambda_k \neq \lambda \text{ при всех } k \in \mathbb{N}; \\ \sum_{k \in \mathbb{N}:k \neq \ell} e^{\mu_k t} {<}.,e_k{>} e_k, & \text{если существуют } \ell \in \mathbb{N}{:}\lambda_\ell = \lambda. \end{cases},$$

где $\mu_k = (\alpha\lambda_k^2 + \beta\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)^{-1}$.

$$L_1^{-1} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_k)^{-1} {<}.,e_k{>} e_k, & \text{если } \lambda_k \neq \lambda \text{ при всех } k \in \mathbb{N}; \\ \sum_{k \in \mathbb{N}:k \neq \ell} (\lambda - \lambda_k)^{-1} {<}.,e_k{>} e_k, & \text{если существуют } \ell \in \mathbb{N}{:}\lambda_\ell = \lambda. \end{cases}$$

3.6. Свойства решений уравнения Дзекцера в квазисоболевых пространствах

Исследуем свойства решений однородного уравнения (3.5.1). Введем условие:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Пусть}\quad \sigma^L(M)=\sigma^L_1(M)\cup\sigma^L_2(M);\\ \sigma^L_1(M)\ \text{ состоит из конечного числа точек } \{\mu_k\}\subset\sigma^L(M)\\ \Omega_1\subset\mathbb{C} \text{ – круг, содержащий точки } \sigma^L_1(M)\ \text{ и }\ \overline{\Omega}_1\cap\sigma^L_2(M)=\emptyset.\end{array}\right\} \tag{3.6.1}$$

Очевидно, в силу (3.6.1), условие (3.2.1) выполняется. Тогда, в силу леммы 3.2.1, существуют проекторы

$$P_1=\sum_{\mu_k\in\sigma^L_1(M)}<.,e_k>e_k \text{ и } Q_1=\sum_{\mu_k\in\sigma^L_1(M)}<.,e_k>e_k.$$

Построим пространства

$$\mathfrak{U}^{11}=\operatorname{im}P_1=\left\{u\in\mathfrak{U}:u_k=0 \text{ если }\ \mu_k\notin\sigma^L_1(M)\right\},$$

$$\mathfrak{F}^{11}=\operatorname{im}Q_1=\left\{f\in\mathfrak{F}:f_k=0 \text{ если }\ \mu_k\notin\sigma^L_1(M)\right\},$$

$$\mathfrak{U}^{10}=\ker\,P_1=\left\{u\in\mathfrak{U}:u_k=0 \text{ если }\ \mu_k\in\sigma^L_1(M)\right\},$$

$$\mathfrak{F}^{10}=\ker\,Q_1=\left\{f\in\mathfrak{F}:f_k=0 \text{ если }\ \mu_k\in\sigma^L_1(M)\right\},$$

и через

$$L_{11}=\sum_{\mu_k\in\sigma^L_1(M)}(\lambda-\lambda_k)<.,e_k>e_k$$

$$(M_{11}=\sum_{\mu_k\in\sigma^L_1(M)}(\alpha\lambda_k^2+\beta\lambda_k)<.,e_k>e_k)$$

обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^{11}$.

Построим операторы

$$P_2 = P - P_1 = \sum_{\mu_k \in \sigma^L(M) \setminus \sigma_1^L(M)} < ., e_k > e_k \text{ и}$$

$$Q_2 = Q - Q_1 = \sum_{\mu_k \in \sigma^L(M) \setminus \sigma_1^L(M)} < ., e_k > e_k.$$

В силу следствия 3.2.1, эти операторы – проекторы. Положим

$$\mathfrak{U}^{12} = \operatorname{im} P_2 = \left\{u \in \mathfrak{U}^1 : u_k = 0 \text{ если } \ \mu_k \in \sigma_1^L(M)\right\},$$

$$\mathfrak{F}^{12} = \operatorname{im} Q_2 = \left\{f \in \mathfrak{F}^1 : f_k = 0 \text{ если } \ \mu_k \in \sigma_1^L(M)\right\}$$

и через

$$L_{12} = \sum_{\mu_k \in \sigma^L(M) \setminus \sigma_1^L(M)} (\lambda - \lambda_k) < ., e_k > e_k$$

$$(M_{12} = \sum_{\mu_k \in \sigma^L(M) \setminus \sigma_1^L(M)} (\alpha\lambda_k^2 + \beta\lambda_k) < ., e_k > e_k)$$

обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^{12}$.

Следствие 3.6.1.

(i) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1, \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1, \quad \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}^{11} \oplus \mathfrak{U}^{12}, \quad \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}^{11} \oplus \mathfrak{F}^{12}$*;*

(ii) операторы $L_{12}, M_{12} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^{12}; \mathfrak{F}^{12})$*;*

(iii) существует оператор $L_{12}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^{12}; \mathfrak{U}^{12})$.

Доказательство. (i) и (ii) очевидны. Оператор

$$L_{12}^{-1} = \sum_{\mu_k \in \sigma^L(M) \setminus \sigma_1^L(M)} (\lambda - \lambda_k)^{-1} < ., e_k > e_k. \bullet$$

Следствие 3.6.2. *Пространство* $\mathfrak{U}^{11}$*, являющееся образом группы*

$$V^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu, t \in R, \tag{3.6.2}$$

и пространство $\mathfrak{U}^{12}$ *являются инвариантными пространствами уравнения* (3.5.1).

Следствие 3.6.3. *Если* $\operatorname{Re}\,\mu_k \neq 0$ *для всех* $\mu_k \in \sigma^L(M)$*, то решения уравнения* (3.5.1) *обладают экспоненциальной дихотомией.*

Доказательство. Очевидно, выполнены все условия теоремы 3.4.1.●

Заключение

В результате проведенного диссертационного исследования:

1. Разработана теория относительно секториальных операторов в квазисоболевых пространствах последовательностей. Построены относительные резольвенты, рассмотрены их свойства. Доказана теорема о расщеплении пространств, действий операторов в квазисоболевых пространствах последовательностей в относительно секториальном случае.

2. Доказана теорема о существовании голоморфных разрешающих вырожденных полугрупп операторов в квазисоболевых пространствах последовательностей. Исследованы ядра и образы полугрупп, доказано существование их единиц.

3. Полученные результаты теории голоморфных вырожденных полугрупп операторов применены к исследованию разрешимости начальных задач для одного класса вырожденных эволюционных уравнений в квазисоболевых пространствах последовательностей.

4. Определены многочлены от квазиоператора Лапласа и рассмотрен аналог однородной задачи Дирихле в ограниченной области с гладкой границей для линейного уравнения Дзекцера в квазибанаховых пространствах последовательностей. Получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения Дзекцера в квазисоболевых пространствах.

5. Исследованы свойства решений одного класса вырожденных эволюционных уравнений в квазисоболевых пространствах последовательностей. Получены условия существования инвариантных пространств и дихотомий решений.

Это позволяет говорить о соответствии диссертационной работы специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

В работе решены все поставленные задачи и достигнута цель исследования, результаты имеют завершенный характер и необходимы для дальнейшего развития теории уравнений соболевского типа в квазибанаховых пространствах. В частности, идеи и методы данной работы лягут в основу исследований уравнений высокого порядка, а также уравнений соболевского типа с относительно радиальными операторами. Результаты исследования открывают возможность изучения уравнений соболевского типа в стохастических квазисоболевых пространствах.

Кроме того, построение теоретической базы открывает перспективы не только начать исследования неклассических уравнений в квазибанаховых пространствах последовательностей и различных задач такого рода, но и рассматривать возможность более эффективного решения ряда технических задач. Именно приложение теоретических результатов в различных областях позволяет говорить о дальнейшей практической применимости исследования.

Список литературы

[1] *Александров, А.Б.* Квазиномированные пространства в комплексном анализе: дис. ... док. физ-мат. наук / А.Б. Александров. – Ленинград, 1983.

[2] *Аль-Делфи Дж.К.* Квазисоболевы пространства ℓ_p^m / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 107–109.

[3] *Балакришнан, А.В.* Прикладной функциональной анализ / А.В. Балакришнан. – М.: Наука, 1980.

[4] *Баскаков, А.Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов / А.Г. Баскаков // Функциональный анализ и его приложения. – 1996. – Т. 30, № 3. – С. 1–11.

[5] *Баскаков, А.Г.* Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов / А.Г. Баскаков, К.И. Чернышов // Математический сборник. — 2002. — Т. 193, № 11. — С. 3–35.

[6] *Баренблатт, Г.И.* Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикладная математика и механика. — 1960. — Т. 24, № 5. — С. 852–864.

[7] *Берг, Й.* Интерполяционные пространства. Введение / Й. Берг, Й. Лёфстрем. — М.: Мир, 1980.

[8] *Васильев, В.В.* Полугруппы операторов, косинус оператор–функции и линейные дифференциальные уравнения / В.В. Васильев // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. — 1990. — Т. 28. — С. 87–202.

[9] *Вовк, С.М.* Постановка задач определения линейных параметров сигналов в квазиномированных пространствах / С.М. Вовк, В.Ф. Борулько // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. — 2010. — Т. 53, № 7. — С. 31–42.

[10] *Гантмахер, Ф.Р.* Теория матриц / *Ф.Р. Гантмахер.* – М.: Наука, 1967. – 576 с.

[11] *Далецкий, Ю.Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. — Москва: Наука, 1970.

[12] *Демиденко, Г.В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / *Г.В. Демиденко, С.В. Успенский.* – Новосибирск: Изд-во Научная книга, 1998. – 438 с.

[13] *Демидович, Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967.– 472 с.

[14] *Дзекцер, Е.С.* Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью / *Е.С. Дзекцер* // ДАН СССР. – 1972. – Т. 202, № 5. – С. 1031-1033.

[15] *Егоров, И.Е.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения / *И.Е. Егоров, С.Г. Пятков, С.В. Попов.* – Новосибирск: Наука, 2000.

[16] *Забрейко, П.П.* Об одном классе полугрупп / П.П. Забрейко // ДАН СССР. — 1969. — Т. 189, № 5. — С. 934–937.

[17] *Загребина, С.А.* Устойчивость в моделях Хоффа / С.А. Загребина, П.О. Москвичева. — Saarbrucken: LAMBERT Academic Publishing, 2012.

[18] *Замышляева, А.А.* Линейные уравнения соболевского типа высского порядка / А.А. Замышляева. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012.

[19] *Зубова, С.П.* О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовым оператором при производной / С. П. Зубова, К. И. Чернышев // Дифференц. уравнения и их применение. – 1976. – № 14. – С.21–39.

[20] *Келлер, А.В.* Относительно спектральная теорема / А.В. Келлер // Вестник Челяб. гос. университета. Сер. Матем. Мех. — 1996. — № 1 (3). — С. 62–66.

[21] *Келлер, А.В.* Голоморфные вырожденные группы операторов в квазибанаховых пространствах / А.В. Келлер, Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2015. – Т. 7, № 1. – С. 20–27.

[22] *Клемент, Ф.* Однопараметрические полугруппы / Ф. Клемент, Х. Хейманс, С. Ангенент, К. ван Дуйн, Б. де Пахтер. — М.: Мир, 1992.

[23] *Коддингтон, Э.А.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. – М.: ИЛ, 1958. – 474 с.

[24] *Кондюков, А.О.* Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова ненулевого порядка / А.О. Кондюков, Т.Г. Сукачева // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т. 55, № 5. – С. 823–828.

[25] *Костин, А.В.* К теории функциональных пространств Степанова / А.В. Костин, В.А. Костин. — Воронеж: Изд.-полигр. центр ВГУ, 2007.

[26] *Костин, В.А.* К теореме Соломяка–Иосиды для аналитических полугрупп / В.А. Костин // Алгебра и анализ. — 1999. — Т. 11, вып. 1. — С. 118–140.

[27] *Костин, В.А.* Элементарные полугруппы преобразований и производящие их уравнения / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // ДАН. — 2014. — Т. 455, № 2. — С. 1–4.

[28] *Костин, В.А.* Эволюционные уравнения с особенностями в обобщенных пространствах Степанова / В.А. Костин, С.В. Писарева // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2007. — № 6. — С. 35–44.

[29] *Крейн, С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. — М.: Наука, 1967.

[30] *Крейн, С.Г.* Функции Ляпунова и задачи Коши для некоторых систем уравнений в частных производных / С.Г. Крейн,

В.Б. Осипов // Дифференц. уравнения. — 1970. — Т. 6, № 11. — С. 2053–2061.

[31] *Крейн, М.Г.* О некоторых вопросах, связанных с кругом идей Ляпунова в теории устойчивости / *М.Г. Крейн* // УМН. – 1948. – Т. 3, № 3. – С. 166-169.

[32] *Крейн, М.Г.* Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / *М.Г. Крейн.* – Киев: Изд-во ИМ АН УССР, 1964. – 186 с.

[33] *Ладыженская, О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. — М.: Наука, 1973.

[34] *Ляпунов, А.М.* Собрание сочинений. Т.2 / *А.М. Ляпунов.* – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – 473 с.

[35] *Майзель, А.Д.* Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений / А.Д. Майзель // Тр. Уральск. политехн. ин-та. Сер. математика. – 1954. – № 51. – С. 20-50.

[36] *Манакова, Н.А.* Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа / Н.А. Манакова. — Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012.

[37] *Массера, Х.Л.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства / Х.Л. Массера, Х.Х. Шеффер. – М.: Мир, 1970.– 456 с.

[38] *Мельникова, И.В.* Задача Коши для включения в банаховых пространствах и пространствах распределений / И.В. Мельникова // Сиб. мат. журн. — 2001. — Т. 42, № 4. — С. 892–910.

[39] *Мельникова, И.В.* Интегрированные полугруппы и C-полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач / И.В. Мельникова, А.И. Филинков // Успехи мат. наук. — 1994. — Т. 49, № 6. — С. 111–150.

[40] Мизохата С. Теория уравнений с частными производными.- М.: Мир, 1977.- 504 с.

[41] *Мухамадиев, Э.М.* Об оценке спектрального радиуса одного оператора, связанного с уравнениями нейтрального типа / Э.М. Мухамадиев // Математические заметки. — 1973. — Т. 13, вып. 1. — С. 67–78.

[42] *Новиков, С.Я.* Об особенностях оператора вложения симметричных функциональных прространств на $[0,1]$ / С.Я. Новиков // Математические заметки. — 1997. — Т. 62, вып. 4. — С. 549–563.

[43] *Руткас, А.Г.* Спектральный анализ и вопросы разрешимости операторно-дифференциальных уравнений / А.Г. Руткас // Успехи мат. наук. — 1987. — Т. 42, вып. 4. — С. 161.

[44] *Руткас, А.Г.* Спектральные методы исследования вырожденных дифференциально-операторных уравнений / А.Г. Руткас // Современная математика и ее приложения, том 35: Тру-

ды весенней математической школы "Понтрягинские чтения – XIV Воронеж, 2003. Часть 2. — Тбилиси, 2005. — С. 48–64.

[45] *Сагадеева, М.А.* Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М.А. Сагадеева. — Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2012.

[46] *Свешников, А.Г.* Линейные и нелинейные уравнения Соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. — М., 2007.

[47] *Свиридюк, Г.А.* К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. — 1994. — Т. 49, № 4. — С. 47–74.

[48] *Свиридюк, Г.А.* Фазовые пространства полулинейных уравений типа Соболева с относительно сильно секториальным опкратором / Г.А. Свиридюк // Алгебра и анализ. — 1994. — Т. 6, № 5. — С. 252–272.

[49] *Свиридюк, Г.А.* Линейные уравнения типа Соболева и сильно непрерывнные полугруппы разрешающих операторов с ядрами / Г.А. Свиридюк // ДАН. — 1994. — Т. 337, № 5. — С. 581–584.

[50] *Свиридюк, Г.А.* Задача Шоуолтера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. — 2012. — № 1. — С. 104–125.

[51] *Свиридюк, Г.А.* Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 60–68.

[52] *Свиридюк, Г.А.* Неклассические модели математической физики / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2012. — № 40 (299). — С. 7–18.

[53] *Сукачева, Т.Г.* Задача Тейлора для модели несжимаемой вязкоупругой жидкости нулевого порядка / Т.Г. Сукачева, О.П. Матвеева // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 6. – С. 771–779.

[54] *Турбин, М.В.* Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель-Балкли / М.В. Турбин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2013. – № 2. – С. 246-257.

[55] *Федоров, В.Е.* Исследование разрешающих полугрупп линейных уравнений соболевского типа в банаховых и локально выпуклых пространствах: дис. ... докт. физ.-мат. наук / В.Е. Федоров. – Челябинск, 2005.

[56] *Хасан, Ф.Л.* Относительно спектральная теорема в квазибанаховых пространствах / Ф.Л. Хасан // Материалы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2014. — Воронеж, 2014. — С. 393–396.

[57] *Хенри, Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. — М.: Мир, 1985.

[58] *Хилле, Е.* Функциональный анализ и полугруппы / Е. Хилле, Р. Филлипс. — М.: ИЛ, 1962.

[59] *Чшиев, А.Г.* Спектральный анализ вырожденных полугрупп операторов : дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.Г. Чшиев. – Воронеж, 2011.

[60] *Шестаков, А.Л.* Численное решение задачи оптимального измерения / А.Л. Шестаков, А.В. Келлер, Е.И. Назарова // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 1. — С. 107–115.

[61] *Al'shin, A.B.* Blow-up in nonlinear Sobolev type equations / A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. — Berlin: de Gruyter, 2011.

[62] *Arendt, W.* Vector valued Laplace transforms and Cauchy problems / W. Arendt // Israel J. Math. — 1987. — V. 59. — P. 327–352.

[63] *Bastero, J.* An extention of Milmans Reverse Burn–Minkowski inequality / J. Bastero, J. Bernuès, A. Péna // Math. & Func. Anal. — 1995. — V. 1. — P. 950–1210.

[64] *Bohl, P.* Über Differentialugleichungen / P. Bohl // J. f. reine und angew, Math. – 1913. – V. 144. – S. 284-318.

[65] *De Laubenfelds, R.* Integrated semigroups, C-semigroups and the abstract Cauchy problem / R. de Laubenfelds // Semigroup Forum. — 1990. — V. 41. — P. 83–95.

[66] *Demidenko, G.V.* Partial differential equation and systems not solvable with respect to the highest–order derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. — New York–Basel–Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003.

[67] *Favini, A.* Laplace transform method for a class of degenerate evolution problems / A. Favini // Rend. Mat. — 1979. — V. 12, № 3-4. — P. 511–536.

[68] *Favini, A.* An operational method for abstract degenerate evolution equations of hiperbolic type / A. Favini // J. Funct. Anal. — 1988. — V. 76. — P. 432–456.

[69] *Favini, A.* Degenerate differential equation in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. — New York etc.: Marcel Dekker Inc. — 1999.

[70] *Hadamard, J.* Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles / J. Hadamard // Bull. Soc. Math. – 1901. – V. 29. – P. 224-228.

[71] *Hardtke, J.D.* A Remark on Condensation of Singularities / J.D. Hardtke // Journal of mathematical physics, analysis, Geometry. — 2013. — V. 9, № 4. — P. 448–454.

[72] *Heuser, H.G.* Functional analysis / H.G. Heuser. — New York: John Wiley and sons, Ltd, 1982.

[73] *Kalton, N.* Quasi-Banach Spaces / N. Kalton // Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 2, Edit. by W.B. Johnson and J. Lindenstrauss. – Amsterdam etc.: Elsevier, 2003. — P. 1099–1130.

[74] *Kellerman, H.* Integrated semigroups / H. Kellerman, M. Hieber // J. Funct. Anal. — 1989. — V. 84. — P. 160–180.

[75] *Komatsu, H.* Semi-group of operators in locally convex spaces / H. Komatsu // J. Math. Soc. Japan. — 1964. — V. 16. — P. 230–262.

[76] *Komura, T.* Semigroups of operators in locally convex spaces / T. Komura // Anal. — 1968. — V. 2. — P. 252–296.

[77] *Pazy, A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations / A. Pazy. — New York etc.: Springer, 1983.

[78] *Perron, O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen / O. Perron // Math. Z. – 1930. – V. 32, № 5 – P. 703-728.

[79] *Pyatkov, S.G.* On some mathematical models of filtration theory / S.G. Pyatkov, S.N. Shergin // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2015. – Т. 8, № 2. – С. 105–116.

[80] *Pyatkov, S.G.* Existence of maximal semidefinite invariant subspaces and semigroup properties of some classes of ordinary differential operators / S.G. Pyatkov // Operators and Matrices.– 2014. – T. 8, № 1. – P. 237–254.

[81] *Rolewicz, S.* Metric Linear Spaces / S. Rolewicz. — Warsaw: PWN, 1985.

[82] *Schwartz, L.* Lectures on mixed problems in partial differential equations and representation of semi-groups / L. Schwartz. — Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, 1958.

[83] *Showalter, R.E.* The Sobolev type equation I / R.E. Showalter // Appl. Anal. — 1975. — V.5, № 1. — P. 15–22.

[84] *Sidorov, N.* Lyapunov–Shmidt Method in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinithyn, M. Falaleev. — Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2002.

[85] *Sviridyuk, G.A.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht, Boston: VSP, 2003.

[86] *Yosida, K.* Functional Analysis / K. Yosida. — New York, London, 1978.

Публикации автора по теме диссертации

[87] *Замышляева, А.А.* Голоморфные вырожденные полугруппы операторов и эволюционные уравнения соболевского типа в квазисоболевых пространствах последовательностей / А.А. Замышляева, Дж.К. Аль Исави // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика, механика, физика. - 2015. - Т. 7, №4. - С. 31-40.

[88] *Замышляева, А.А.* On some properties of solutions to one class of evolution sobolev type mathematical models in quasi-sobolev spaces / А.А. Замышляева, Дж.К. Аль Исави // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическее моделирование и программирование. - 2015. - Т. 8, №4. - С. 113-119.

[89] *Al Isawi, D.K.* On Some Properties of Solutions to Dzektser Mathematical Model in Quasi-Sobolev Spaces / D.K. Al Isawi //

Journal of Computational and Engineering Mathematics - 2015. - Vol.2, №4. - Pp. 27-36.

Тезисы и материалы конференций

[90] *Аль Исави, Дж.К.* Линейные замкнутые операторы в квазибанаховых пространствах / Дж.К. Аль Исави // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2014". — Воронеж, 2014. — С. 18-21.

[91] *Свиридюк, Г.А.* Линейные уравнения соболевского типа с относительно p-секториальными операторами в квазибанаховых пространствах / Г.А. Свиридюк, Дж.К. Аль Исави // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль, Россия , 4-9 июля 2014 г.: тез. докл. – М: МИАН, 2014. — С. 25.

[92] *Аль Исави, Дж.К.* Линейные замкнутые операторы в квазибанаховых пространствах / Дж.К. Аль Исави // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2016". — Воронеж, 2016. — С. 47-50.

[93] *Аль Исави, Дж.К.* Об инвариантных пространствах и экспоненциальных дихотомиях решений уравнения Дзекцера в квазисоболевых пространствах // Сборник статей Международной научно-практической конференции "Приоритетные научные исследования и разработки (г. Саратов)". Ч.2 - Уфа: МЦИИ ОМЕГА САЙНС, 2016. — С. 3-4.